BARTHOLOMÆI INTIERI FLORENTINI

AD NOVA ARCANA GEOMETRICA DETEGENDA ADITUS

Ad Illuſtriſs. & Excellentiſs. Dominum

D. HIERONYMUM ONERUM CABANILIUM S. MARCI MARCHIONEM,

Ducem S. Johannis Rotundi, Rodi, S. Severi, & Candelari Dominum, e Comitibus Trojæ, & Montellæ, &c.

BENEVENTI, E' Typographia Archiepiſcopali.
Anno reparatæ ſalutis MDCCIII.

Superiorum permiſſu.

Digitized by Google

EXCELLENTISSIME DOMINE.

SI omnibus,in quorum ma-
nus hæc perventura ſunt,
manifeſtum foret,quid me
cauſæ impulerit, ut hæc
mea invẽta Tibi dicarem,
opus profectò non eſſet,
hìc in prima fronte libelli
pluribus prẹfari,ut meum
& Tibi, & cuicumque hẹc
legerit, animũ aperirẽ.Ve-
rùm,quia lõgè alia me ratio movit, ac ea,qua ad-
duci ſolent,quicumque maximis Viris,ceù Patro-
nis ſua ſcripta commendãt; ideò paucis hìc expo-
nam, quid me adegerit ad hæc Tibi nuncupanda:
fieri quippè poſſet, ut aliquis id me feciſſe puta-
ret, quò eorum veſtigiis inſiſterem, qui æternam
ſibi nominis famam adepti,Tibi,& Majoribus Tuis
ſuos labores ſacrarũt; quemadmodum factum vi-
demus ab Actio Sincero Sannazario claro illius ſẹ-
culi ornamento,a quo Salices ſuæ magno Trajano
Cabanilio Muſas, Muſiſque operam navantes tũc
temporis protegenti dono datæ ſunt;& ab Iohan-
ne Cotta mollitie Catulliana inſigni,à quo lepidiſ-

ſimo epigrammate hendecaſillabis verſibus conſcripto Calor fluvius, atque Montella ſub Trajani ditione celebrata eſt, ut eidem gratum faceret, à quo benignè ſuſceptus divitiis, honoribuſq; auctus fuerat; ut prætercam Ludovicum Vives, & Illuſtriſſimum Dominum, D. Franciſcum Verde, Virum tùm doctrina, tum morum integritate conſpicuum, Iohannem Acamporam, & plurimos alios, qui Cabaniliũ nomen honoris, tutelæq; cauſa ſuis lucubrationibus inſcripſere. Qui verò præclarũ Generis Tui decus, ſplẽdoremq; norunt (norũt autẽ omnes) me in hanc ſententiam adductum fuiſſe pro certo habebunt; ut meus hic parvus, incultuſque libellus præclariſſimo Cabaniliorum nomine inſignitus aliquid ſplendoris, honoriſque acquireret. Tanta ſiquidem eſt Cabaniliæ Gentis dignitas, atquè nobilitas, ut ex hujus ſola inſcriptione æternam nominis immortalitatem conſequi facillimũ ſit; cum inter Europæ clariores, ſplendidioreſque recenſenda ſit, ſivè ad ejuſdem primam, & à longa innumerabilium annorum ſerie repetẽdam originẽ ſpectes, ſivè ad magnitudinẽ rerum, quas Summi, Maximique Cabanilii Viri pace, & bello inſignes geſſère, non quidem intra unius vaſtiſſimæ regionis limites, qualis eſt Hiſpania; ſed & in univerſa ferè Europa, Aſiaque; quemadmodum teſtantur, qui rerum geſtarum memoriam ſcriptis tradiderunt. Sed nec deerũt etiam, qui me id feciſſe arbitrabuntur, ut gratum Tibi facerem Viro ſummoperè potenti, cum quia ab omnibus ſummo in honore, & amore habitus es, tum quia Deus

op-

Optimus Max: Te iis Fortunę bonis auxit, quæ nobilem Virum maximè fælicem reddere poſsũt. At, ut veritati locus ſit, nullum horum me movit. Quid itaque? Maximus Virtutum omnium cumulus, quæ in Te uno elucent. Crede mihi (nullos potius veritas decet, quàm qui Mathematicis operã dant) quamvis pręter ea, quæ ſuperius dicta ſunt, plurima, quæ in me contuliſti beneficia ad hoc Tibi præſtandum me adigerent; nihil tamen apud me tãtum ponderis habuit, quàm ut hoc levi munuſculo aliquid grati exhiberem ei, qui omnibus virtutibus ornatus eſt. Quid enim in Viro omni ſcientiarum genere prędito deſiderari poteſt, quod in Te non ſplendeat? Quid in Viro claritate Generis maximè conſpicuo, quod in Te non eluceat? Quid deniquè in eo, qui toto corde Pietatem colit, quod Tu ipſe ſumma animi contentione ſequendum, ampleꝫendumque non cures. Te celebrant unanimi ore quotquot hac tempeſtate literis operam dant; non ſolum, ut ipſorum dulce præſidiũ, & decus; ſed etiam, quia primum inter omnes locum habes, tanta eſt ingenii Tui vis, atquè acies, qua ea ſcrutari, atquè enodare potes, quę altis obvoluta tenebris, multorum ingenia diù, moleſtèque torſerunt. Id manifeſtè etiam apparet ex omnigena librorum copia, quam Tibi maximis ſumptibus, incredibilique diligentia comparaſti, in quo Parentis Tui fęl: mem: præclarum exemplum imitatus es, cui plurimùm quidem bonæ literæ debent; is enim fuit, qui audaci niſu, tantoque viro digno non ſolum à levibus, perpetuoque riſu di-

gnis

gnis poëtis, qui verboſam, riduculoſamque poëſeos artem invehere conabantur, ſummoperè abhorrebat; quemadmodum ex ipſius doctiſſimis ſcriptis, quæ adhuc extant, cognoſci poteſt: ſed & eas diſciplinas colere, atquè colendas curavit, e quibus ingentem deindè utilitatem univerſa Reſpublica literaria conſequuta eſt; cum anteà in nullo pretio habitæ, neglectæq; jacerent: ita erant quiſquiliis, nugiſque hominum ingenia addicta: hinc factum eſt, ut ſummo in honore haberetur ab iis, qui tunc temporis veram ſapientiam colebant; unde Maximus ille M. Aurelius Severinus eũdem & librorum ſuorum, & cæterarum rerum hæredem inſtituit. Quis verò Te non demirabitur, ut clariſſimum veræ Nobilitatis exemplar? Equidem ſi ea agere, & curare, quæ Patriæ decus, & gloriam, cunctis utilitatem, & admirationem, ſibi verò æternam laudem, nomenque allatura ſunt, Viri nobilitate conſpicui eſt; nullus certè Tibi æquiparandus, nedum anteponendus. Quod verò hæc, & majora in Te eluceant, clariſſima, quæ de Te Fama circumfertur, centum ſuis tubis toto Terrarum orbe prædicat. Quid verò dicam de ea, qua præditus es Pietate? Profectò nullum veræ virtutis genus eſt, in quo excellere, primumque locum tenere non curaveris; in hoc verò ita Te præbes, ut omnes longè poſt Te relinquas. Neque ſingula hìc enumerabo, quibus manifeſta ſigna dediſti, non minus ea Tibi cordi eſſe, quę Viros ſummo genere natos decent, quàm quę recti, honeſtique ſectatorem, qualem eſſe oportet

Chri-

Chriſtianæ Reipublicæ Civem; plurima ſiquidem eſſent, nequè huic oneri ferendo meæ vires ſunt. Verùm ſilẽtio hoc unum præterire nolo, quo bonorũ omnium digito mõſtrari dignus es, Te ſummam operam, diligentiamque adhibuiſſe, ut Filii Tui, quibus æternam felicitatem precor, ſanctiſſimis inſtitutis, omniumque diſciplinarum genere, perquàm optimè inſtituerentur; undè nullis laboribus, ſumptibuſque parcens viros undequaque doctiſſimos arceſſiſti, quibus ipſorum cura demandaretur. Atquè utinam tam nobile, ſanctumque exemplum omnes imitarentur; ſic enim fieret, ut & aurea ſæcla redirent, Terraſque iterum peteret Cęlos Aſtrea relinquens. Tibi autem gratulor, quod Deus Opt. Max. votis Tuis annuit, Tuiſque conatibus benedixit, dum tot, tantiſque virtutibus eoſdem auxit, ut quemadmodum ſol inter ſidera micat, ſic intẽr ingenuos hujus Vrbis Juvenes, ſplendeant, atque eluceant. Nullus enim morum ſuavitate, animi candore, & fortitudine, cæterarumque virtutum ornamento cum ipſis comparari poteſt. Cum itaquè in Te uno ea omnia animadverterem poſita, quorum exigua pars vix, aut raro in aliis reperiri poteſt; facere non potui, quin Tibi hæc dicarem, quibus perſpectum haberes, me ex eorum numero eſſe, qui Te plurimi faciunt, omnique veneratione proſequuntur non levibus rationibus adducti; ſed ſola virtutum Tuarum admiratione, quæ quidem tanti apud me ponderis eſt, ut pluris valeat, quam quæ ſuperius dicta ſunt, quæque in me contuliſti

be-

beneficia, quibus ita teneor, ut jure hæc Tibi debeam. Nunc itaque grato animo hæc excipias rogo, cum ut meum in Te ſtudium, & obſequium ingratum non fuiſſe intelligam; tum ut ab iis defendantur, qui aliena ſcripta carpere, & lacerare avent, iniquo potius livore, quam veritatis amore impulſi. Cum etenim quiſque Te Patronum, Defenſoremque eorum, qui literis operam dant, probe noſcat; nullus ita felle madebit, ut me, meaque hæc inventa inſequi audeat. Quòd ſi hæc, qualiacumque ſint, accepta habere non dedignatus fueris, vires, animoſque mihi addideris, ut majora aggredi non dubitem, quò magis meum in Te animum notum reddam. Vale, Teque Literis, & Patriæ ornamento Deus Opt. Max. ſervet.

Excellentiæ Tuæ

Dabam in S. Marci Oppido
IV. *Idus. Nov. Anno rep. ſal.*
M.DCC.III.

Devotiſs. atque Addictiſs.
Bartholomæus Intieri.

MATHEMATICARVM

DISCIPLINARVM

AMATORIBVS

BARTHOLOMÆVS INTIERI S.P.D.

VT primum ad Mathematicas diſciplinas animũ applicare cæpi, dici nõ poteſt, quàm ardenti erga illas amore flagraverim, cum ob ipſarum ſupra reliquas, quæ ſcientiæ nomine, ſi quæ ſunt, appellantur, præſtantiam, & dignitatem, tum etiam ob nectaream illam dulcedinem, qua hominis mentem allicere primum ad ſe, deindè occulta quadam vi trahere ſolent. Quarè mihi ipſi indulgens totũ his me tradere ſtatui. Verùm multùm, diùque dubius hæſi; cum etenim à prima pueritia ſacris initiari (ſi Deus votis annueret) decreviſſem, longè ab inſtituto meo alienum putabam iſtas tam avidè ſectari. Nec deerant, qui ab omni ſcientiarum genere abhorrentes, ab hoc ſtudio me avertere conabantur, idque, velut probrum, mihi obiiciebant. Quem autem mihi inieceram ſcrupulum, omninò exemit ter illius maximi Philoſophi, nullique in Mathematicis ſecundi, Petri inquam Gaſſendi, Inauguralis Oratio in regio Pariſienſi Collegio habita: ibi enim rationibus firmiſſimis oſtendit, nullos potius, quã ſacris addictos Mathematicas decerè; cum hæ ad ſummam Dei potentiam intelligendam, quantum infir-

b ma

ma humanæ mentis acies patitur, plurimùm condu-cant. Hoc itaquè obice, qui mihi non parvam mole-ſtiam afferebat, amotò, totum me ipſis tradidi, nihil ſol-licitus, quòd ab iis, quos ſola lucri cupido delectat, ceu mentis inops digito monſtrarer. Ita verò magis in dies creſcebat harum ſcientiarum, & præcipuè Geometriæ ardor, ut nihil mihi potius eſſet, quàm ſolidos trāſigere dies, aut cum iis, quibus hęc eadē ſtudia cordi erāt, aut inter libros ad harum ſciētiarum progreſſum aditum patefacientes. Hinc autem factum eſt, ut ſummo pro-ſequerer amore, & veneratione, qui omnem curam, di-ligentiamque adhibuerunt, ut has diſciplinas promo-verent. Quarè quotieſcumque ſe ſe mihi occaſio offe-rebat, Vietas, Galilæos, Borellioſque ſummis laudi-bus extollebam ob ipſorum præclara in Geometricis inventa; Carteſium verò, Fermatiumque, ceu duo cla-riſſima Geometriæ lumina, demirabar: eò enim ob ipſo-rum exantlatos labores deventum eſt, ut facilli-mum ſit ad Geometriæ penitiora arcana rimāda adi-tum facere, ut benè norunt, qui ipſorum præceptis im-buti ſunt. Cumque animadvertiſſem, quantum jactu-ræ paſſa Geometria foret, ſi horum Virorum elucu-brationes publici juris factæ non fuiſſent; perpetua nota eos dignos cenſebam, qui aut aliorum inventa ſepulta jacere patiuntur, aut propria palam facere non ſatagunt. Ego verò ita ſemper ab hoc abhorrui, ut inſuper putaverim, omnibus eſſe, nulla interpoſita mora, communicandum, ſi quid novi in his ſcientiis reperire contigerit, nec diù in mente, aut adverſariis latere patiendum eſſe; melius quippè, feliciuſque à multis nova inventa excoluntur, atque promoven-

tur,

tur, quàm ab uno: ut prætéream, quod ipſa cunctatio maximo ſæpè cedit detrimento; ut benè multorum exẽpla monent, qui morte præventi æterna nominis immortalitate fraudati fuere. Hæc cum ita ſe habeant; iniquè me agere exiſtimarem, ſi libenti, candidoque animo Vobis, qui idem, ſed fælicius calcatis iter, hanc nuper à me excogitatam methodum deſcribendi non ſolum lineas illas curvas, quæ primum poſt Conicas ſectiones locum ſibi vendicant; ſed eas etiam, quæ has, cæteraſque deinceps, & miro quidem ordine, in infinitum conſequuntur, impartirer. Opus à nullis quidem antehac, ut ſciam, peractum; omnibus verò ſummoperè optatum. Id verò, eò libentius, citiuſque, quam par eſſet Vobis offerre æquũ mihi viſũ eſt, quòd ab hoc ſublimis illa, Cœlituſque (liceat his verbis uti) de locorum compoſitione demiſſa ſcientia, quæ jam ulterius promoveri poteſt, pendet. Spero etenim, ſi quis mihi opem ferat, auxiliatriceſque manus porrexerit, ut quamprimùm locorum ſuperſolidorum facillimè compoſitio abſolui poſſit; hac ſiquidem methodo, qua cubicas parabolas, hyperbolaſque in plano deſcribo, plurimæ aliæ curvæ ejuſdem generis deſcribi poſſunt, ita ut non admodum difficile ſit, cujuſcumque loci curvam invenire. Quin ex ipſa, quam adducam, methodo manifeſtè, niſi fallor, colligitur, ſi eorum locorum compoſitio perficiatur, quæ ad tertiam, vel quartam dimenſionem aſſurgunt, perquam facillimum fore, & cætera componere: in ſequentibus ſiquidem demonſtrabo, plurimas proprietates, quæ alicui curvæ cõveniunt, eaſdẽ, habita ratione poteſtatum, & cæteris curvis convenire, eodemque inſuper modo demonſtrationem procede-

 re,

re; quod quidem methodi elegantiam ſatis demonſtrat. Quarè cum Apolloniana parabola hac proprietate prædita ſit, ut quadratum cujuſcumque ex applicatis æquetur plano ſub parametro in intercæptam; eadem hæc proprietas, & parabola, quæ hanc conſequitur, cõvenit, modò quæ in Apolloniana de plano dicta ſunt, in hac de ſolido intelligantur. Demonſtratio verò, qua ambæ hæ proprietates demonſtrantur, non ſolùm eadem, atquè unica eſt, ſed & locum etiam habet in altioribus deinceps curvis; undè abſquè iniuria dicere auſim, non rectam, ſimpliciſſimamque adhuc initam eſſe viam, qua ad Conicarum ſectionum proprietates detegendas itur, nequè etiam benè inſtitutam eſſe locorum compoſitionem. Quarè nil aliud ad hanc adeò utilem doctrinam promovẽdam ſupereſt, ò Optimi veræ Geometriæ Amatores, quàm ut animum ad horum locorum compoſitionem advertatis; quandoquidem, & maximi labores, moleſtiæque, quas impreſſorum menda, atquè errata pariunt, ſublatæ ſunt; Illuſtriſſimum quippè, atquè Excellentiſſimum Dominum D. Hyeronimum Onerum Cabanilium, Virum tum generis nobilitate conſpicuum, tum virtutum omniũ ornamento inſignem rogavi, ut pro ſua, Majorumque ſuorum in Viros literis addictos propenſione, huic rei opitularetur. Qui quidem ſumma animi alacritate omnem operam pollicitus, libenter hoc onus ſuſcepit, ut propriis ſumptibus de eorum editione curaret, quę ab aliis ad hanc remſpectantia excogitata ad ipſum tranſmitterentur, una cum authorum nominibus, nequis hantillam, quam ſibi cõparavit, gloriam amittat. Quòd ſi id nobis ad exitum perducere contigerit, haud minus hoc

ſe-

ſæculo nacta incremẽtum Geometria erit, quàm proximè elapſo ſummorum Virorum opera, & labore; ita ut, ſi multum ipſis debemus, non minus etiam nobis Nepotes noſtri debeant. Hoc autem opuſculum in lucem emiſi tribus epiſtolis comprehẽſum, quarum ſecunda, in qua difficillima, quæ in Carteſiana Geometria ſunt, enodantur, atquè explanantur, Illuſtriſſimo Domino, D. Didaco Vincentio à Vidania Regii Sacelli Præſuli, ſtudiorumque Præfecto nuncupata eſt; cum etenim decreviſſem coram ipſo, atquè Illuſtriſſimo Senatu de Geometria diſſerere, ut idem una cum aliis mei periculum faceret; poſſemne inſtituendæ iuventutis in his diſciplinis munus obire; nec cum tempus aderit, quod pollicitus ſum, præſtare valeam; Neapoli enim abſum: animadvertere, atque judicare ex ipſa, & reliquis epiſtolis ipſe cum aliis, quorum eſt, poterit, an huic oneri ferendo meæ vires ſint. Ceterum eos, quibus mecum in eodem ſtadio currendum eſt, rogatos velim; ut pro bono harum diſciplinarum incremento, typis etiam committere velint, quæ ab ipſis excogitata ſunt; ſic enim fiet, ut pateat non minus hujuſmodi diſciplinas Italis cordi eſſe, quã reliquis Europæ gentibus. Valete, & ſi quid boni, in his meis inventis ineſt, benignè excipite.

Illu-

Illuſtriſſimi, Nobiliſſimique Viri

JOHANNIS MICHAELIS

CABANILII

Equitum Catholici Monarchæ Præfecti, &c.

EPIGRAMMA.

QVi legit hunc, Veterum mirari inventa, libellum
Deſinat, & quicquid priſca Matheſis habet.
INTERVS nobis en clauſa arcana repandit;
Et docet inſolitas abſque labore vias.
Gallia jam ſileat, nec jam ſe Græcia jactans
Laudibus ipſa ſuos tollat ad aſtra Viros:
Nunc dedit Heroes tellus Saturnia, quales
Ætas nulla dedit, nec dabit ulla dies.

ALIVD.

EIa age, BARTHOLOMÆE, novos meditare labores;
Et tactum à nullo contere tutus iter.
Quid ceſſas nobis referare arcana Matheſis?
Arcana à magnis non patefacta Viris!
Edas illa precor, quæ nunc incognita multis
Quicquid ſplẽdoris, quicquid honoris habet.
Æternum Tibi nomen erit, Tibi fama perennis,
Sic tibi permagnum, perpetuumque decus.

EMIN. PRINCEPS.

IUſsù Eminentiæ Tuæ,Librum, cui Titulus eſt *Aditus ad Nova Arcana Geometrica detegenda* per Bartholomæum Intieri Florentinum editum, attentè per legi, in eoque nil à Fide orthodoxa devium, nil bonis moribus diſſonum reperi,imo cuncta ad litterariç Reipublicæ decus augendum,nec non ad eruditionem Chriſtiani Hominis, Geometricæ facultatis ſtudioſi, conducentia,ſum admiratus, quapropter ut publici Juris fiat,in lucem edi poſſe, cenſeo,ſi tamen ita Eminentiæ Tuæ videbitur, interim Paſtoralis Benedictionis exoptans radios, humillimè deoſculor Sacrç Purpuræ oras,ex Carmelo Beneventi hac die 21. Novembris 1703.

Eminentiæ Tuæ

Humill. & Obſequentiſs. Seruus
M.Fr.Albertus Annubba Carmelita.

Imprimatur die 23. Nouembris 1703.
Fr. Vincentius Maria Card. Archiep.

ERRATA CORRIGE.

Pag.	linea		
5	14	BG	BC
6	2	conſtituta Efficiente	conſtituatur Efficiens
14	26	quadratocubus	quadratoquadratum
16	22	ASB	SAB
23	10	primam	ſecundam
32	12	plano	in plano]
35	33	præteream	præteribo
38	7	punctum	p.ncto
Eadẽ	Eadẽ	ipſos	ipſas
Eadem	31	fieri	cieri
43	17	quadratoquadratica	quadratoſolida
49	22	*x3y*	*y3x*
53	pen.	*in prima epiſtola*	*in ſecunda epiſtola*
53	ult.	*prima ſex.*	*prima ſecundi*
59	4	*r*	*r4*
60	in aliquibus locis ponatur D pro A.		
73	13	Diameter	Parameter

Hæc, & plurima alia, quæ irrapſerunt menda; corrigas benigne Lector, etiã atque etiam te rogo.

EPISTOLA
PRIMA
Ad Illuſtriſs. & Excellentiſs. Dominum
D. DOMINICVM
IVDICE
Cellamaris Principem, Juvenacii Ducem, Terlitii Dominum, S. Jacobi Equitem, S.C.M. à conſiliis in ſupremo Belli, & Jtaliæ Senatu, &c. Hiſpaniarum Magnatem.

In qua

De ortu, atquè in plano generatione infinitarum Parabolarum agitur, in quibus applicatarum cubi, vel quadratoquadrata, &c. æquantur vel ſolido ſub quadrato interceptæ in parametrum, vel planoplano ſub cubo intercæptæ in parametrum, &c.

Digitized by Google

Digitized by Google

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Domino

D. DOMINICO

JUDICE JUVENACII DUCI, &c.

BARTHOLOMÆUS INTIERI S.P.D.

SI quis unquam fuit, Excellentiſſime Domine, qui eos plurimi fecerit, faciatque, à quibus Mathematicæ diſciplinæ in pretio habitæ; & cultæ ſunt, is profectò ego ſum, cui nihil potius fuit, & eſt, quam tales viros veneratione proſequi, ipſorumque amicitiam, cum mihi licuit, comparare; vel certè grata recordatione, laudibuſque eorum nomina extollere, qui modo vita functi; de his diſciplinis bene meriti fuere; cæteris enim mente, & animo illos præſtare puto, qui levibus ſtudiis poſthabitis, atque hanc viam ingreſſi, ad verarum ſcientiarum ſedem, quæ procul dubio Mathematicæ ſunt, pervenire valuerunt. Quare cum ſæpius inter diſſerendum cum harum ſcientiarum ſtudioſis, quos noſco (noſco autem plurimos, quique non vulgarem ſibi gloriam compararunt) Te eò in hiſce diſciplinis perveniſſe cognoverim, quo nullus, vel pauci pervenire potuerunt, maximo ſum affectus deſiderio in Tuam amicitiam, atque in eorum numerum, qui Te maxime colunt obſervant, & amant,

recipi . Et jam mecum ipſe conſtitueram Excellentiſſimum Dominum Celamaris Principem digniſſimum, tanto Patre Filium, tum literarum omnium, quibus ornatur, ſplendore, tum animi magnitudine, humanitate, morum integritate, cæterarumque virtutum, quæ nobiles viros decent, ornamento, rogare, ut me Tibi per literas commendaret. Verum, quia id paulo temporis opus habuiſſet, Neapoli enim nunc abſum, & ſtudiorũ meorum cauſa, atque ut morem geram Illuſtriſſimo, & Excellentiſſimo Domino meo D. Hyeronimo Onero Gabanilio, qui etiam Tibi plurimam ſalutem dicit, moræ impatiens Sententiam muto, nulloque adhibito Patrono, en ad Te hac Epiſtola venio, etiam atque etiam rogans, ut me mei voti compotem reddas, nihil enim mihi jucundius accidere poteſt, quam me totum ei devovere, qui nullis Generis claritate, fortunæque bonis cedit, omnes vero doctrina, cæteriſque virtutibus, quas à majoribus accipere non poſſumus, ſed nobis nos metipſi comparamus, præcellit. Vt verò magis Tibi perſuaſum ſit, quã in Te exardeſcat animus meus, utque mihi facilior aditus pateat, libens hoc Tibi munus offero, exiguum quidem, at non ſpernendum, ob ejus, qui donat in Te obſequium, & ſtudium, qui nihil apud ſe charius, vel præſtantius habet, quo ſuam in Te obſeruantiam notam reddat.

Id verò eſt, quod nuper excogitavi de ortu, atque in plano deſcriptione infinitarum Parabolarum, in quibus cubus, vel quadratoquadratum, vel quadratocubus applicatarum, & ita deinceps, æquatur ſolido, vel quod ſub quadrato intercæptæ inter verticem, & applicatas in datam rectam, ſive parametrum, vel ſub cubo intercæptæ in parametrum, aut ſub quadratoquadrato intercæptæ in parametrum continetur, & ita etiam deinceps. Quod quidem inventum quãtam utilitatem Geometriæ allaturum ſit Tibi judicandum relinquo; ex hac quippe methodo hujuſmodi curvas deſcribendi non ſolum elegans difficillimorum pro-

blematum pendèt ſolutio; ſed & doctrina locorum, quam cælitus demiſſam puto, quò clarius Geometriæ miracula eluceant, multum incrementi accipere poteſt; ut præteream quòd ex ipſa deſcriptione plurimæ harum curvarum proprietates erui poſſunt, quibus, & naturalis Philoſophia, & cuncta denique Matheſis non parum promoueri poſſit. Si etenim primi generis curvæ, quæ tres, aut quatuor tantum ſunt Parabola videlicet, Hyperbola, Ellipſis, atque Circulus ingentes ſuppetias Matheſi, atque Philoſophiæ tulerunt, quis non videt maximas ab his præſtari poſſe, quæ non quatuor, aut quinque, vel decem, aut centum, ſed numero indefinitæ ſunt? Sed hæc ſatis dicta ſint; nunc ad propoſitum venio, & planæ, ſive Apollonianæ Parabolæ in plano deſcriptionem primo loco tradam, ut manifeſtè appareat geneſim curvarum, quas deſcripturus ſum, earumque etiam, quas Veteres coni ſectiones appellare conſueverunt, non à ſolido, ut ipſi à cono, petendam eſſe, ſed ex plano; cum hoc naturæ magis conſonum ſit, ſimpliciuſque, quemadmodum ex methodo, quam allaturus ſum cognoſci poterit, ex qua mira appar et harum parabolarum Natura, atque ordo; ad altiores quippe tranſitus fieri non poteſt, niſi prius ſimpliciores cognitas habeamus: quod quidem plurimi in Mathematicis faciendum eſt. Itaque prima parabola (ita deinceps appellare libet Apollonianam parabolam) originem trahit à linea recta, ſecunda, ſive cubica, à prima; tertia, ſive Quadratoquadratica à ſecunda, ſive cubica, & ita deinceps eodem ordine. An vero has eaſdem curvas è ſolidis eruere liceat hoc ſimpliciſſimo ordine, videant ii, quos nimium delectat ſolidorum contemplatio. Ego vero ita primã parabolã deſcribo.

In figura prima hujus epiſtolæ ſit triangulum iſoſceles BIH, cujus æqualia latera ſint BI, IH, quæ quidem indefinitè producantur, latus BI ad partes D, & A: latus HI ad partes G, reliquum vero latus BH ad partes C, latus autem HI, ita moveri concipiatur, ut ſemper ſibi ipſi æquidiſtet, atque dato ſui puncto H maneat ſemper in latere BH, motu

 au-

autem ſuo movere etiam faciat rectam ID datam, quæ quidem ſemper applicata maneat in latere BI, punctum autem ipſius I, maneat ſemper fixum in latere HI, ita ut quando latus HI excurrit ad partes C, & recta ID tẽdat ad partes S, cũ vero latus HI accedit ad punctum B, & recta ID etiam ad punctum B accedere debeat. Per puncta autem H, D tranſeat recta HD, quæ liberè per hæc pũcta excurrere poſſit. In puncto autem B conſtituatur recta BG indefinita ad partes G, quæ circulariter moveri poſſit in eodem puncto B, quæque parallela ſemper exiſtat rectæ HD. Hæc itaque recta BG rectam HG interſecabit. Dico ex hac interſecatione curvam oriri, quæ prima parabola, ſive Apolloniana parabola erit, cujus vertex erit B, diameter recta BK, quæ parallela ducitur rectæ HG, applicatæ vero erũt eæ omnes, quæ æquidiſtantes ducuntur rectæ ADS, velut recta GK. Hæc autem omnia demonſtrari facillime poſſunt; ſumto quippe in curva hac ratione deſcripta, quolibet puncto, ut G, conſtituiſque rectis, quarum motu, atque interſectione deſcripta fuit in ea ſtatione, uti fuere, quando deſcriptum eſt punctum G (id vero fieri intelligatur, quoties opus erit, quod hic monere viſum eſt, ne eadem in ſequentibus, non ſine tua moleſtia, repetere cogar) ſimilia itaque erunt triangula DIH, GIB, *(a)* quare ita erit DI ad IH, ut BI ad IG, & rectangulum ſub extremis, nempe rectangulum DIG æquabitur rectangulo BIH, *(b)*. Quoniam vero BI æquatur IH, *(c)* erit rectangulum DIG æquale quadrato BI, hoc eſt ex puncto G ducta GK parallela BI occurrente rectæ BK in K, erit rectangulum ſub DI in rectam BK æquale quadrato BI, vel GK, unde omnia, quæ demonſtranda erant, patent. Quod ſi recta HIG perpendicularis fuerit ad rectam AS, diameter BK erit axis. Quomodo vero ex altera parte continuari hæc curva poſſit ſatis ex appoſitis ſchematibus patet; quare in hujus curvæ deſcriptione amplius non immorabor.

(a) 29. *Primi, & 4. ſex.* *(b)* 16. *ſex.* *(c)* 4 *ſex.*

Vſque adhuc alii pervenire potuerunt: Iohannes ſiquidem de Witt inſignis ſane Geometra Parabolam,& reliquas coni ſectiones in plano ſatisbellè deſcripſit, verum, præterquam quod ulterius ille progredi non potuit, ejuſdem methodum noſtræ poſthabendam puto, non ſolum, quia unica, & ſimpliciſſima utimur, tam cum data diameter eſt axis, vel non; verum etiam, quia hæc ad infinitas alias parabolas deſcribendas aditum patefacit; ita ut dicere auſim, me ulterius, quam alii, prætervectum, immenſum aperviſſe iter, cujus quantumvis emenſus fueris, nunquã tamen metam attigeris.

Quoniam vero in ſequentibus eodem fere motu rectas lineas cieri concipiendum eſt, ideo nonnullas ex his, quæ præcipuæ in deſcriptione ſunt, iſtis appellationibus deſignabimus. Eſto itaque BG, per quam recta HG movetur, ſive recta, vel curva fuerit DIRECTRIX. HG vero, quæ ſemper ſibi ipſi paralella movetur DESCRIBENS, cum vero ipſa eſt in puncto B, ubi conſtituitur vertex anguli HBI, Deſcribens in ſtatione prima; recta vero BG, EFFICIENS, recta autem AS Efficiens in ſtatione prima; Punctum vero B Polus appellabitur: Recta autem data DI Intervallum vocetur. His præmiſſis ad ſecundæ parabolæ deſcriptionem accedo.

Cum prima parabola illa ſit, in qua quadratum applicatæ æquatur rectangulo ſub intercæpta, & data recta, ut ſupra demonſtratum eſt, primum autem locum poſt quadratum cubus occupet; illa dicenda erit ſecunda parabola, in qua cubus applicatæ, æquatur ſolido, quod continetur ſub data in quadratum interceptæ; Vel certè ſolido, quod ſub datæ rectæ quadrato in interceptam continetur, nihil autem in præſentiarum de hac(a): illam verò ipſiſſima methodo, ac prima parabola deſcripta fuit, immutata tantummodo Directriçe, ſic deſcribo.

In figura ſecunda hujus Epiſtolæ vertice A diametro AB, para-

(a) *Vide epiſtolam tertiam ad Illuſtriſſimum D. D. Michaelem Cabanilium.*

parametro AS prima parabola deſcribatur AC; tum in ipſius vertice A, ut Polo, conſtituta Efficiente AD, Directrice eadem parabola AC, Deſcribente vero CBD, quæ ſit perpetuo applicata ad diametrum AB, cujus punctum datum C, ſit sēper in parabola Directrice, quæque ſemper ſibi ipſi parallela moveri concipiatur, motu autem ſuo, ut ſupra dictum eſt movere faciat rectam BI, æqualem parametro AS, quæ quidem BI maneat ſemper applicata in diametro AB; recta autem CI tranſeat ſemper per puncta C, & I, cui parallela ſemper exiſtat Efficiens AD. Interſecabunt itaque ſe ſe Efficiens, atque Deſcribens; Dico ex hujuſmodi interſectione curvam AOD procreari, quæ ſecunda parabola erit, cujus vertex erit A, diameter recta AE, quæ primam parabolam AC in puncto A tangit, ſive Deſcribens in ſtatione prima; applicatæ verò eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvę punctoparallelæ ducuntur diametro AB, ſive Efficienti in ſtatione prima, quarum una in recta DE conſpici poteſt; Dico autem cubum hujus applicatæ DE, æquari ſolido, ſub quadrato interceptæ AE, in Intervallum BI, ſive parametrum AS; quod ita facillimè demonſtratur.

Quoniam enim parallela eſt AD ipſi CI ſimilia erunt triangula IBC, ABD (*a*) quare ita erit *I*B ad BC, ut AB ad BD, ergo rectangulum IBD æquabitur rectangulo ABC(*b*); quod ſi utraque hæc rectangula in BD ducantur, erit ſolidum ſub BI in quadratum BD æquale ſolido ſub tribus DB, BA BC. Quoniam vero continuè proportionales ſunt IB, BC, BA, nam IB æquatur parametro AS (*c*): ut autem IB ad BC, ſive ut BC ad BA ita AB ad BD (*d*), continuè etiam proportionales erunt CB, BA, BD, ac propterea cubus, qui fit à media AB æquabitur ſolido ſub tribus DB, BA, BC (*e*): hoc eſt cubus AB, ſive ED æquabitur ſolido ſub data BI, ſive parametro AS in quadratum BD, ſive AE. Quod erat demonſtrãdum. Quod

(*a*) 29. *primi*, & 4. *ſex*. (b) 16. *ſex*. (c) 11. *lib. primi* Apol. (*d*) 4. *ſex*. (*e*) 36. *Vnd*.

Quòd ſi curvã AOD, ex altera parte, qua eſt punctum G continuare velimus, facillimè id præſtari poterit; producta namque diametro AB ad partes O, vertice eodem puncto A, parametro autem eadẽ recta AS deſcribẽda eſt circa diametrum AG prima parabola AF, ita ut applicatæ ad diametrum AG parallelæ ſint applicatis ad diametrum AB, hoc eſt parallelæ ſint rectæ *CBD*, quam modo Deſcribentem vocavi. Si enim polo A, *D*eſcribente una ex applicatis ad diametrum AG, recta videlicet FGH, quæ certo ſui puncto, ut F, maneat ſẽper in Directrice, quæ ſit parabola AF, Intervallo vero recta GK æquali parametro AS, Efficiẽte autẽ AH parallela rectæ FK, quæ per puncta F, K tranſit, curva AOH ex interſectione *E*fficientis AH, Deſcribentiſque FG*H* deſcribatur; erit hæc eadem parabola *A*OD ad partem H continuata, quemadmodum manifeſtè apparet.

*E*x hac autem deſcriptione patet, Efficientem in ſtatione prima, ſive rectam GAB deſcriptam parabolam in puncto *A*, ſive Polo contingere: ſumto quippè in curva quolibet puncto, ut D, ſemper demonſtrabitur idẽ exiſtere ſupra rectã AB. Item rectas omnes, quæ *E*fficienti in ſtatione prima, ſivè rectæ GAB parallelæ ducuntur, atque utrinque in curva terminantur, bifariam à *D*eſcribente in ſtatione prima, ſivè recta A*E* dividi; ſumto quippè in curva *A*OD quolibet puncto, ut *D*, ductaque D*E*H parallela G*A*B, hæc in *D*eſcribentem A*E*, atque in curvam AOH incidet, quod facile demonſtratu eſt; incidat itaque in *H*, dico bifariam in E dividi: ex proprietate ſiquidem hujus curvæ, tam cubus ED, quàm EH æquantur ſolido ſub parametro in quadratum AE, quarè cubus E*D* æquabitur cubo EH, ac propterea EH, ED æquales erunt. Patet inſuper *D*eſcribẽtem in ſtatione prima AE vocari poſſe diametrum hujus curvæ, quando autem AB eſt axis parabolæ primæ AC, AE erit etiam axis ſecundæ parabolæ AOD: at DEH, omneſque parallelas A*E* ad eandem diametrum, ſivè axem AE applicatas eſſe con-

ſtat

ſtat. Manifeſtum etiam eſt applicatarum cubos inter ſe eſſe, ut ab intercæptis quadrata. Item ita eſſe parametrum, ſivè rectam AS ad applicatamDE, ut ejuſdem applicatæ DE quadratum, ad quadratum intercæptæ AE; ſi nempè tam quadratum applicatæ, quàm intercæptæ pro baſibus horum ſolidorum accipiantur, parameter verò, ac applicata pro altitudinibus(*a*) Demonſtrari etiam poteſt, rectas omnes, quæ diametro parallelæ ducũtur in uno tantum pũcto parabolæ occurrere; quæ vero quemlibet angulum cum diametro cõſtituunt, in duobus punctis occurrere. Item quodlibet curvæ punctum parabolæ verticem eſſe poſſe, & quæ ipſi diametro parallela ducitur, diametrum fore, ad quam applicatæ erunt eæ rectæ, quæ contingenti in vertiee parallelæ ducuntur; atque adeo via ſterni poteſt ad ducendas rectas, non ſolum quæ hanc curvam in dato puncto contingant, ſed eas omnes, quæ expoſita methodo deſcribi poſſunt, quæ quidem curvæ, ut deinceps oſtendam, indefinitæ ſunt. Quoniam vero uberiorem de his curvis tractatum editurus ſum, ſi votis Deus annuat, ideo ab his demonſtrandis abſtineo, Tibi præcipuè, qui ea, qua polles ingenii acie omnia hæc, & longè penitiora ſcrutari potes. Quarè ad deſcriptionem tertiæ Parabolæ tranſitum faciam.

Tertia verò parabola illa eſt, in qua quadratoquadratum cujuſvis ex applicatis æquatur planoplano, quod continetur ſub cubo intercæptæ in datam rectam, ſivè parametrum. Quòd verò parabola quæ hac proprietate gaudet tertium locum inter parabolas occupet, ac propterea tertia dicenda ſit, ex eo patet, quod cum quadratoquadratum proximè cubum ſubſequatur, etiam hæc ſecundam Parabolam ſubſequi debeat. Id verò alia inſuper ratione colligi poteſt. Prima enim parabola illa eſt in qua parameter, ſivè data recta eandem habet rationem ad applicatam, quam eadem applicata ad intercæptam; quoniam verò poſt latus qua-

(a) 34. *Vnd.*

quadratum, ſive planum ſubſequitur; ideo & poſt primam parabolam illa veniet,in qua data recta,ſive parameter eandem habet proportionem ad applicatam, quam ejuſdem applicatæ quadratum, ad quadratum intercæptæ; quare quam ſupra deſcripſimus parabolam, ſecunda dicenda eſt, in ea enim parameter ad applicatam eandem rationem habet, ac ejuſdem applicatæ quadratum ad quadratum intercæptæ: cumque à quadrato ad cubum fiat tranſitus, etiam à ſecunda parabola ad eam fiet tranſitus,in qua parameter eandem habebit rationem ad applicatam, ac ejuſdem applicatæ cubus ad cubum intercæptæ; hoc eſt in qua quadratoquadratum applicatæ æquatur planoplano ſub cubo intercæptæ in datam rectam; hæc autem curva tertia parabola, vel Quadratoquadratica ab ea, qua gaudet præcipua proprietate dicenda eſt,quemadmodum & prima Parabola plana appellari conſuevit.

Huiuſmodi autem curva,Vir præſtantiſſime,eadem prorſus ratione, ac ſecunda deſcribi poteſt. In eadem quippe figura omnia ut ſupra intelligantur: ſed Directrix AC non ſit prima parabola,ſed ſecunda in qua videlicet cubus applicatæ æquetur ſolido ſub quadrato datæ rectæ,ſive parametri in intercæptam;quamvis autem nullus huius ſecundæ parabolæ deſcriptionem tradiderit,ego tamen illius deſcriptionem faciliter abſolvam,Teque,cum fecero,certiorem ſtatim reddam *(a)*. Nunc autem liceat eadem uti,ac ſi deſcripta eſſet, ut à ſimpliciſſima non deflectatur via. Dico curvam,quæ ex Deſcribentis CD, Efficientiſque AD interſectione gignitur tertiam parabolam eſſe, cujus vertex erit A: diameter vero AE, Deſcribens ſcilicet in ſtatione prima, parameter autem AS, applicata vero DE, omneſque æquidiſtantes Efficienti GAB in ſtatione prima;præcipua vero hujus curvæ proprietas erit, ut quadratoquadratum cuiuſcumque applicatæ DE, æquetur planoplano ſub cubo intercæptæ AE, vel

(*a*) *Vide epiſtolam tertiam*,

BD in Intervallum *BI*, ſive parametrum AS, vel quod idem eſt ut parameter BI ad applicatam AB, vel ED eandem habeat rationem, quam cubus ejuſdem applicatæ DE ad cubum intercæptæ DB, vel AE. Id vero probari poteſt facillima quidem demonſtratione,quçque in altioribus etiam curvis locum habeat, ex quo quidem hujus methodi elegantia ſatis elucet. Quoniam enim,ut ſupra dictum eſt,ſimilia ſunt triangula CBI,ABD erit ut IB ad BC,quemadmodum AB ad BD, quare & cubi ab his curvis proportionales etiam erunt *(a)*;ergo ita cubus IB ad cubum BC,ut cubus AB ad cubum BD;quoniam vero ex proprietate ſecundæ parabolæ AC,cubus BC æquatur ſolido ſub quadrato parametri BI in intercæptam BA, erit cubus BI ad ſolidum ſub quadrato ejuſdem BI in BA, vel quia eandem habent baſim, quadratum nempe rectæ BI, ut data BI ad AB, vel ED,ita ejuſdem AB, vel ED cubus ad cubum BD, vel intercæptæ AE. Quod erat oſtendendum.

Cæterum,& ex hujus etiam curvæ deſcriptione manifeſta ſunt ea omnia,quæ ſupra de ſecunda parabola dicta ſunt;ubi verò illic diximus, ita eſſe parametrum, ſive datam rectam ad applicatam, ita quadratum applicatæ, ad quadratum intercæptæ, dicendum in hac eſt, ita eſſe parametrum, ſivè datam rectam ad applicatam, ut ejuſdem applicatæ cubus, ad cubum intercæptæ, quod quidem ſatis manifeſtè patet. Notatu inſuper dignum æxiſtimo,præcipuam proprietatem cujuſcunque harum curvarum, quæ hac methodo deſcribi poſſunt, unica inniti demonſtratione: etenim demonſtratio, qua hujus tertiæ parabolæ præcipuam proprietatem probavi, locum etiam habet in ſecunda, quarta, quinta, ſexta,& reliquis, ut in ſequentibus palam fiet; Quod vero locum etiam habeat in ſecunda, ita demonſtro. In eadem ſecunda figura ſit curva AOD ſecunda parabola deſcripta Directrice AC, quæ ſit prima parabola, Deſcribente vero CD, efficien-

(a) 37.*Vnd.*

ciente AD, &c. ut ſupra, demonſtrandum eſt cubum cujuſcũque applicatæ DE æquari ſolido ſub quadrato intercæptæ AE, in datam BI. Id autem demonſtrandum eadem prorſus demonſtratione, ac in tertia parabola factum eſt. Quoniam enim proportionales ſunt IB, BC, BA, BD, & quadrata, quæ ab his curvis fiunt, proportionalia erunt (*a*). Sed quadratum BC æquatur rectangulo ſub parametro, ſive recta IB in BA(*b*), ergo ita erit quadratũ IB ad rectangulũ ſub IB, & BA, hoc eſt ita IB ad BA(*c*), ut quadratum AB ad quadratum DB, quare(*d*) patet cubũ AB, æquari ſolido ſub quadrato BD, vel AE in rectã datã BI. Quod erat demonſtrandũ.

Quod verò hæc eadem demonſtratio locum in cæteris deinceps curvis habeat, in ſequentibus manifeſtum fiet, dummodo quod hic de quadrato, in tertia de cubo, in quarta de quadratoquadrato dicendum intelligatur.

E quibus, ut puto, manifeſtè apparet, hanc deſcribendi curvas methodum, pro ſimpliciſſima, & maximè naturali, ac germana habendam eſſe, dum non ſolum ab hac unica omnium in infinitum parabolarum geneſis facillimè deducitur, ſed præcipuæ etiam, primariæque ipſarum proprietates ab unica, & per quam eleganti demonſtratione pendent, ut in altioribus parabolis manifeſtum fiet. Id vero an conorum, vel aliorum quorumlibet ſolidorum ſectiones præſtare poſſint, compertum nondum habeo. Hoc unum ſcio proprietates omnes, quæ uſque adhuc cognitæ ſunt, earum curvarum, quæ coni ſectiones appellantur, melius, facilius, brevius, elegantiuſque erui ex earundem in plano deſcriptione, quam ex illa conorum ſectione, quicquid ſtrepant Apolloniani ſectatores, à quibus ingentia ſæpe volumina conſcribuntur, non ut aliquid utilitatis afferant, ſed ut legentium animos, nimia, qua eos afficiunt moleſtia ab his diſciplinis avertant.

(a) 20.*ſex.* (b) 11.*pr. Apoll.* (c) *pri.ſex.*
(d) 34.*Vnd.*

Quomodo verò hæc eadem curva ab altera parte puncti H continuari poſſit, ita per ſe patet, ut explicatione penitus non egeat, quod, & ſatis abundè ipſa figura docet, quare ad quartam parabolam deſcribendam accedam.

Quartam veroParabolam illam eſſe dicimus,in qua quadratocubus applicatæ æquatur planoſolido, quod continetur ſub quadratoquadrato intercæptæ in datam rectam, ſive parametrum, unde, & Quadratocubicæ nomen ſortita eſt; Vel illa eſt quarta Parabola,in qua data recta,ſive parameter eandem habet proportionem ad applicatam, ut ejuſdem applicatæ quadratoquadratum ad quadratoquadratum intercæptæ; ita autem deſcribitur. In eadem ſecunda figura hujus epiſtolæ, omnibus, ut ſupra poſitis, pro Directrice AC conſtituatur tertia parabola AC, in qua cujuſcumque applicatarum quadratoquadratum, æquetur planoplano, quod continetur ſub cubo datæ, quæ ſit Intervallum BI, in intercæptam inter verticem,& applicatas.Dico curvam, quæ oritur ex interſectione Deſcribetis CD,nec non Efficientis AD, quartam parabolam eſſe, cujus vertex erit A, diameter AE, applicatæ verò rectæ omnes, quæ parallelæ ducuntur ipſi AB. Somto enim quolibet puncto in curva AOD,ut D,ductaque DE,erit IB,ad BC,ut BA ad BD, ac propterea, ita etiam quadratoquadratum IB ad quadratoquadratum BC, ſive ex proprietate parabolæ AC ad planoplanum ſub cubo IB in intercæptam AB, vel ita IB ad BA, ut ejuſdem BA, vel DE quadratoquadratum, ad quadratoquadratum BD, vel AE, unde patet propoſitum.

Quod ſi parabolam quartam, loco Directricis ponamus; in qua quadratocubus applicatæ æquetur planoſolido ſub quadratoquadrato parametri in intercæptam, quinta parabola procreabitur, in qua videlicet cubocubus cujuſcumque ex applicatis æquabitur ſolidoſolido, ſub quadratocubo intercæptæ in datam rectam, ſive parametrum. Demonſtratio vero eodem prorſus modo procedit: Ete-

nim

nim proportionales ſunt rectæ IB , BC , & AB , BD , quare & quadratocubi ab his curvis proportionales erunt ; quoniam verò ex proprietate quartæ parabolæ AC quadratocubus applicatæ CB æquatur planoſolido ſub quadratoquadrato IB , ſive parametri , in intercæptam AB , erit etiam quadratocubus datæ BI ad planoſolidum ſub quadratoquadrato BI in AB , vel ut BI ad BA, ita ejuſdem AB , vel applicatæ DE quadratocubus ad quadratocubum BD , vel intercæptæ AE, & patet propoſitum .

Atque uſquè adhuc, ut exiſtimo, ſatis manifeſtè demonſtratum eſt , quomodo quamcumque parabolam deſcribere poſſibile ſit, ſimulque etiam, quomodo demonſtratio concinnanda; quæ quidem ſi Tibi ingrata nõ erunt, omnibus etiam geometris accepta fore confido .

Ideo autem in his curvis deſcribendis adhibui parabolas, quarum deſcriptionem , non dum tradidi , quia hujuſmodi methodus ſimpliciſſima mihi viſa eſt ; facillimè enim quæcunque parabola deſcribi poteſt, qualibet data diametro, ſit ea axis, nec ne. Quare puto parabolas, quas pro Directricibus aſſumpſimus ſimpliciores quodammodo fore iis , quas hac epiſtola tradidimus .

Cæterum non deſunt aliæ etiam methodi , quibus hæ eædem curvæ deſcribi poſſint. In figura etenim tertia hujus epiſtolæ, vertice A, axe verò AB , parametro AS, prima parabola deſcribatur AC . Tum in ipſius vertice A conſtituatur rectus angulus DAC, circulariter mobilis in eodem vertice A; recta autem CBD ad axem AB applicata, ita ſemper ſibi ipſi parallela moveri concipiatur , ut certo ſui puncto C , maneat ſemper in parabola AC, motu autem ſuo ſecum ducat latus AC anguli CAD , ita ut tranſeat ſemper per ejuſdem punctum C; quare hoc motu movebitur etiam reliquũ anguli CAD latus AD, fietque interſectio hujus ejuſdem lateris , & rectæ CBD ; dico ex hujuſmodi interſectione , curvam generari AOD , quæ erit eadem , ac ſecunda parabola ſupra deſcripta , cujus vertex erit A ; axis verò recta AE ,

quæ perpendicularis ex puncto A ad axem AB ducitur, applicatæ verò ad eundem axem AE erunt eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ducuntur rectæ AB, velut in recta DE apparet; hujus autem curvæ hæc erit proprietas, ut cubus cujuſcunque applicatarũ, velut DE æquetur ſolido ſub quadrato intercæptæ AE in parametrum parabolæ AC, rectam videlicet AS; ita verò procedit demonſtratio. Quoniam enim cõtinuè proportionales ſunt CB, BA, BD (*a*), proportionalia etiam erunt, quæ ab ipſis quadrata (*b*), ſed quadratum CB æquatur rectangulo, ſub parametro SA in AB (*c*), ergo ita rectangulum ſub parametro SA in AB ad quadratum ejuſdem AB, ut idem quadratum AB ad quadratum BD, vel ſumta comuni altitudine AB, ut parameter AS ad AB, vel applicatam DE, ita ejuſdem DE quadratum, ad quadratum BD, vel interceptæ AE, quare patet cubum applicatæ D æquari ſolido ſub parametro SA in quadratum interceptæ AE. Quod erat demonſtrandum.

Tertia autem, & reliquæ deinceps parabolæ eadem prorſus methodo deſcribuntur, immutata tãtummodo Directrice AC, atque earum proprietates ipſiſſima, ut ſupra demonſtratione probantur; ſic ad deſcribendam curvam, quam tertiam parabolam ſupra vocavi, opus eſt, pro Directrice AC adhibere curvam, quam modo ſupra deſcripſimus, ſecundam videlicet parabolam; Nam ex interſectione rectæ CD, atque lateris AD tertia parabola AOD deſcribetur, in qua quadratocubus applicatarum æquatur planoplano ſub cubo intercæptæ in datam rectam AS, ſive parametrum. Ita verò ſe habet demonſtratio. Quoniam continuè proportionales ſunt tres rectæ CB, AB, BD, proportionales etiam erunt ab ipſis cubi (*d*), ſed cubus CB ex proprietate ſecundæ parabolæ AC æquatur ſolido, quod continetur ſub parametro AS in quadratum AB, ergo ita erit ſolidum ſub quadra-

(a) 8.*ſex.* (b) 20.*ſex* (c) 11.*lib. pr. Apoll.*
(d) 37.*Vnd.*

drato *AB* in parametrum *AS* ad cubum ejuſdem *AB*, vel, quia hæc ſolida eandem baſim habent, quadratum videlicet *AB*, ita parameter AS, ad rectam *AB*, ut ejuſdem *AB* cubus, ad cubum *BD*, quare, & quadratoquadratum *AB*, vel applicatæ DE, æquabitur plano plano, ſub cubo *BD*, vel interceptæ AE, in parametrum AS, quod quidem demonſtrandum ſuſceperam. Similiter ad deſcribendam quartam parabolam, opus tantum eſt pro ſecunda parabola AC, tertiam cōſtituere, quæ Directricis efficium ſubeat, ad deſcribendam verò quintam, ſumenda eſt quarta AC, & ita deinceps. Quæ omnia ita per ſe patent, ut in his amplius inſiſtere non debeam.

Hanc autem methodum, ideo ſuperiori poſthabendam duco, quod non ita facile ſit has parabolas deſcribere, data qualibet diametro; quam enim modo expoſui, locum tantum habet cum data diameter eſt axis. Quare & ſupra etiam diximus methodum, qua Iohannes de witt parabolam primam delineavit noſtræ ſuperius allatæ poſthabendam; ratio enim, qua ille parabolam deſcripſit cum data poſitione diameter eſt axis alia eſt, atque ea, cum non eſt. Quod unico modo à nobis factum eſt. Accedit etiam quod alterius ſpeciei parabolas, de quibus in tertia epiſtola diſſero, primo loco expoſita methodo multò facilius deſcribi poſſunt, quam modò tradita; ut prætercam, quod & hyperbolas omnes, de quibns in ſecunda epiſtola, ſimili quadam methodo etiam deſcribuntur.

Si vero Tibi magis hæc arrideat, hac ratione & eaſdem parabolas deſcribemus. In figura quarta circa diametrum *A*E, vertice A parametro AS, applicatis verò in dato angulo, puta SA*B*, deſcribenda ſit ſecunda parabola, in qua cubus cujuſcumque ex applicatis, æquetur ſolido ſub quadrato intercæptæ in datam rectam. Ex puncto *A* ducatur AB, ita ut angulus S*AB*, æquetur dato angulo, tum vertice A, parametro AS, diametro verò AB prima parabola deſcribatur *A*C, ita ut applicatæ ad diametrum *AB* faciant angulos

æqua-

æquales dato SAB, vel ipſius ad duos rectos complemento; tum ex quolibet hujus curvæ puncto, ut C, ducta applicata ad diametrum AB, fiat ut CB ad BA, ita eadem BA ad BD; dico punctum D eſſe ad ſecundam parabolam, cujus vertex erit A, parameter verò AS, diameter autem AE, applicatæ verò ad diametrum AE eæ omnes, quæ cum eadem datum angulum SAB comprehendunt: Quare ſi alia, atque alia puncta in parabola AC accipiantur, curvã AOD quæſitam deſignabimus. Demonſtrationem autem non affero quia, ex iis, quæ ſupra dicta ſunt, facillimè colligi poteſt.

Si vero ſatis hæc Tibi methodus expedita nõ videatur, facillimè quidem, ut puto, remedium afferri poterit: qualibet enim diametro data, anguloque, quem applicatæ cum eadem faciunt, una cum parametro ad eandem pertinente, nõ difficile quidem erit punctum invenire, quod ſit extremum, ſive vertex axis parabolæ deſcribendæ, nec non parametrũ ad eundem axim pertinentem: ita propoſitæ parabolæ deſcriptio ad modò expoſitam methodum reduci poterit: Id verò in prima parabola manifeſtum fit. Sit enim in figura quinta vertice A, diametro AC, parametro AB, applicatis verò in angulo SAB deſcribenda prima parabola, nec tamen diameter AC ſit axis; ducta AB in angulo ASB, in eadem ſumatur AB æqualis lateri recto ad diametrum AC pertinenti, tum ex A perpendicularis ad diametrum AC erigatur AD, atque ex puncto B demittatur BD parallela AC, occurrens AD in D: quoniam itaque angulus SAB datus eſt, dabitur etiam BAD complementum ad rectum, cumque angulus BDA ſit rectus, (a) dabitur etiam ABD, quare cum detur AB, dabitur, & BD(b), quæ bifariam in I dividatur, ſumtaque AG æquali dimidio, hoc eſt DI ex puncto G ducatur GE parallela BD, diviſaque bifariam in F; ipſis FG, EA, tertia proportionalis inveniatur FO. Dico punctum F eſſe verticem axis; quæ verò ex puncto F parallela ducitur AC

eſſe

(a) 32.*pr.* (b) 6.*ſex.*

eſſe axem, rectam autem FO eſſe parametrum ad eundem axem pertinentem. Demonſtrationem verò non afferam, ne nimia Te molœſtia afficiam, quandoquidem eo, quo polles ingenii acumine faciliimum Tibi erit, hæc, & alia ſexcenta, & quidem longè penitiora perſpicere. Quod verò id in altioribus etiam parabolis locum habeat pro certo habeo, quarè modò expoſita methodo uti poterimus, etiam ſi data poſitione diameter non ſit axis.

Poſſunt quoque hæ eædem curvæ infinitis fermè modis deſcribi, verùm ſilentio eos præterire æquum duxi, nullos enim faciliores, aut elegantiores iis, quos expoſui, inveniri poſſe autumo.

His autem curvis ſatis, ut reor fœliciter, deſcriptis, operæ pretium eſt, ut aliqua dicam de utilitatibus, quæ ab iſtis emanant; verùm ita plurimæ ſeſe mihi offerunt, ut multitudine earum penè obrutus, undè initium mihi faciendum ſit, non planè videam. Quoniam verò de locorum compoſitione ſupra me aliqua allaturum promiſi, ideo nonnulla hac de re in medium prius afferam, quæ Tibi non iniucunda fore ſpero.

Beneficio itaque ejus, quam primo loco expoſuimus, methodi, ea eadem loca componi poſſunt, quorum æquationes duobus tantum terminis comprehenduntur, quorum unum altera ex ignotis quomodolibet in ſe ducta conſtituit, alterum verò reliqua ignota, ita in datam quantitatem ducta, ut numerum dimenſionum hujus ignotæ excedat numerum dimenſionum quantitatis notæ. Itaque ſi locus per hanc æquationem deſignatus $x^{3} \infty ayy$. componendus proponatur: ſuppoſito initio quantitatis indeterminatæ. x. puncto A (vide figuram 2. hujus epiſt.) ita, ut hæc eadem quantitas x. ſeſe extendere intelligatur ab A verſus B: quantitas verò indeterminata y, ſupra hanc in dato angulo ABD. exurgat, quod & in ſequentibus ſemper intelligendum eſt: opus tantum eſt vertice A, parametro verò recta data, per literam a deſignata, diametro verò AE, quæ ex puncto A

parallela ipſi *BD* ducitur, ſecundam parabolam *AOD* deſcribere ita; ut applicatæ ſint rectæ, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ *AB* ad diametrum AE ducuntur: quæ omnia juxta ea, quæ ſuperius tradita ſunt, perfici poſſunt; curva enim AOD erit locus quæſitus. Sumto quippè in ipſa quolibet puncto, ut D, ductaque *DB* parallela ipſi *AE*, nec non *DE* parallela ipſi AB; quoniam cubus applicatæ *DE*, vel *AB*, hoc eſt x^3 æquatur ſolido ſub quadrato *AE*, vel BD, ſive *yy* in parametrum, quæ eſt *a*, ideo habebitur hujuſmodi æquatio $x^3 \infty ayy$. & patet propoſitum.

Quod ſi habeatur huiuſmodi locus $x^4 \infty ay^3$ facillimè quidem componetur deſcribendo curuam, quam ſupra tertiam parabolam vocavimus.

Si vero locus componēdus per hanc æquationem $x^5 \infty ay^4$ deſignabitur, componi quidem ille poterit deſcribendo curvam, quam ſupra quartam parabolam diximus. At ſub hoc genere alia etiā parabola hìc cōſideranda venit, cujus æquatio conſtitutiva per hos terminos exprimitur videlicet $x^5 \infty aay^3$ Quarè ſi locus per hanc æquationem deſignatus componendus fuerit, ita expoſita methodo id aſſequemur. In eadem ſecunda figura intelligatur curva Directrix AC ſecūda parabola eſſe, in qua cubus cujuſcumquè in ea applicatis æquetur ſolido, quod continetur ſub quadrato interceptæ in parametrum, quæ ſit *a*. quomodò verò hæc curva deſcribi poſſit ſuperius tradidimus; Deſcribente autem CB*D*, Intervallo verò parametro, ſive *a*, à recta BI deſignato, Efficiente autem AD, curva *AOD* deſcribatur; dico hanc eſſe locum quæſitum. Sumto quippè in ipſa quolibet puncto, ut D, conſtructiſque omnibus, ut in figura apparet; cum ſimilia ſint triangula CBI, ABD(*a*), ſitque ut *AB* ad BD, ſive *x*, ad *y*, ita BI ad BC, ſive *a*. ad quartam, erit BC æqualis *ay*, diu: per *x*. quoniam verò ex proprietate parabolæ AC, cubus BC, ſive a^3y^3, diu: per x^3, æquatur ſolido, quod con-

(*a*) Ex hyp. 29. pri. & 4. ſex.

continetur, ſub quadrato AB in parametrum a, hoc eſt, ſolido axx: (intellige autem AB eſſe diametrum parabolæ AC) habebimus æquationem hujuſmodi $x^5 \propto aay^3$. Et patet, quod erat demonſtrandum. Quod ſi æquatio ad ſex dimenſiones aſcendat, hoc modo $x^6 \propto ay^5$, facillimè quidem conſtrui poterit, adhibendo curvam, quam ſupra quintam parabolam nuncupavimus; ſub hoc autem gradu duæ tantum parabolæ cadunt, ea videlicet, quam modo expoſuimus; quæque per hanc æquationem $x^6 \propto a^5 y$ exprimitur, de qua in tertia epiſtola diſſerimus. Si verò conſtruenda æquatio ſeptem dimẽſionum fuerit, quæque per hos terminos exprimatur $x^7 \propto ay^6$ conſtrui ipſa poterit, adhibendo curvam, quæ ſexta parabola erit, quæque facillimè vtraque allata methodo deſcribi poterit. Quoniam autem ſub hoc gradu ſex diuerſæ parabolæ cadere poſſunt, quæ per hos terminos exprimuntur $x^7 \propto ay^6$. $x^7 \propto aay^5$. $x^7 \propto a^3y^4$. $x^7 \propto a^4y^3$. $x^7 \propto a^5y^2$. $x^7 \propto a^6y$ Ideo quò clarius methodi, qua utor præſtantia appareat, utque alios etiam ad harum contemplationem recta, quæ ad illas ducit, detecta via, alliciam, quomodò primæ tres parabolæ deſcribi poſſint oſtendam; reliquæ verò tres in tertia epiſtola explanabuntur. Si itaquè hujuſmodi habeatur æquatio, $x^7 \propto ay^6$ illa conſtrui poterit adhibita curva, quę eadem prorſus ratione deſcribetur, atque prima, ſecunda, & tertia deſcriptæ ſunt, ut ſupra dictum eſt. Si autem hæc fuerit æquatio $x^7 \propto aay^5$ in eadem figura ſecunda, pro Directrice AC conſtituatur parabola, cujus æquatio conſtitutiva per hos terminos exprimatur $x^5 \propto a^3y^2$, quæ quidem parabola in tertia epiſtola deſcripta habetur: ex interſectione etenim Deſcribentis, Efficientiſque curva AOD deſcripta erit illa, qua indigebimus ad propoſitæ æquationis conſtructionem; id verò ita patet. Intervallum BI vocetur a; AB verò, ut ſupra, x, BD autem y. Quoniam itaque ſimilia ſunt triangula ABD, CBI, (a) BC erit ay, dius

 per

(a) *Ex hyp. 29. pri. & 4. ſex.*

per x. Quoniam verò planocubus BC, ſive a^5y^5 diu: per x^5 æquatur planoſolido ſub cubo Intervalli BI in quadratum intercæptæ AB, hoc eſt a^3xx; ideo habebitur hujuſmodi æquatio a^5y^5 diu: per $x^5 \infty a^3xx$; & facta congrua multiplicatione, atque diviſione, habebitur æquatio $aay^5 \infty x^7$, & patet propoſitum. Pro conſtructione autem tertiæ equationis $x^7 \infty a^3y^4$, ita operandum eſt. In eadem ſecunda figura, Directrix AC ſit curva, quam ſupra tertiam parabolam appellavi, curva enim, quæ ex interſectione Deſcribentis, Efficientiſque deſcribetur, apta erit ad propoſitæ æquationis conſtructionem. Sumto enim in ipſa quolibet puncto, ut D, omnibuſque conctructis, ut in figura apparet, demonſtrabitur BC eſſe ay, diu: per x. Quoniam verò quadratoquadratum ejuſdem BC, ſive a^4y^4 diu: per x^4 æquatur planoplano ſub cubo intercæptæ AB in Intervallum BI, hoc eſt ax^3, ex proprietate Directricis AC; ideo habebitur hujuſmodi æquatio, videlicet a^4y^4, diu: per $x^4. \infty ax^3$, vel facta multiplicatione, & diviſione $a^3y^4 \infty x^7$, & patet propoſitum.

Nec abſimili methodo parabolæ omnes, quæ ſub quolibet gradu comprehenduntur deſcribi poſſunt, ita ut omnia ea loca, quorum æquationes duobus terminis exprimuntur, quæque ad has reduci poſſunt, compoſita ſint, quemadmodum ex ſecunda, & tertia epiſtola colligi poteſt: nec puto facilliorem, aut elegantiorem methodum excogitari poſſe.

Quæ autem ab hac locorum compoſitione, necnon ab harum curvarum deſcriptione emanare poteſt utilitas tanta eſt, ut auſim dicere, maximè uſquè adhuc mancam, atque imperfectam fuiſſe Geometriam, quæ quidem omnem perfectionem conſequi, omnibuſque numeris abſoluta evadere poteſt, modò aliqua diligentia adhibeatur, in excolendis iis, ad quæ expoſita methodus ducit. Te verò Dux Excellentiſſime, qui ſummis virtutibus ornatus totius Reipublicæ literariæ bono ſemper ſtuduiſti, enixè rogo, atque obſecro, ut hæc tuis auſpiciis inventa, Tibique, ut primum excogitata mihi fuere, ſincera mente dono data, ex-

co-

colenda, atque illuſtranda cures; Ipſe enim es, qui, ceù Sol radiis ſuis omnia fovet, miraque fecunditate complet, hominum ingenia, neſcio, qua præpotenti vi, ita acuis, atquè fæcundas, ut grandia quiſque Tuo numine ductus aggredi non dubitet: unde Tua, totiuſque Domus Tuæ Fama, atque Nomen totum jam pervolat orbem, dum quilibet Te, Tuorumque inclita geſta, ſcriptis celebrare geſtit. Mihi verò ad hæc ulterius promovenda animos, atque vires adiicere poteris, ſi meum erga Te ſtudium, atque amorem acceptum habere non dedignatus fueris.

At verò non ſolùm ea loca componi poſſunt, quorum æquationes duobus tantum terminis exprimuntur, ſed & cætera omnia, modo aliqua diligentia in his curvis excolendis adhibeatur; ſi enim, ut aliquod exemplum afferam, locus componendus proponatur, hac æquatione deſignatus *xx—2bxy∞ayy*. Quantitas verò indeterminata *x* (vide figuram ſextam), initium ex puncto A ſumere, atque ſe per rectam ABI poſitione datam extendere ad partes I concipiatur; reliqua verò indeterminata *y*, ſupra AB exurgere in dato angulo ABQ: ex puncto A, rectam AM ducere oportet in dato angulo ABQ, & ſumta AM æquali quantitati, quæ in æquatione per *b*, deſignatur, opus eſt ex puncto M rectam ducere MQ parallelam AB; vertice autē V, ita ut MV æquetur *bb*, diu: per *a*, parabola prima deſcribatur VAC, cujus quidem parameter ſit quantitas, quæ per *a* deſignatur, applicatæ verò ad diametrū VQ ſint in dato angulo ABQ. Polo deinde A, Directrice verò modo deſcripta parabola AC, Deſcribente autem CBQ, atquè Intervallo BI æquali parametro *a*, & Efficiente AD curva deſcribatur AOD, hæc enim erit locus quæſitus; ſumto enim in ipſa quolibet puncto, ut E, conſtructiſque omnibus, ut in figura apparet, cùm AB ſit *x*, BD vero *y*, & BI *a*, erit BC *ay*; diu: per *x*. CQ verò erit *ay*, diu: per *x*, ✳ *b*. Quoniam verò hujus rectæ CQ quadratum, quod eſt *aayy* diu: per *xx*, ✳ 2*aby* diu: per *x*, ✳ *bb*,

æqua-

æquatur rectangulo ſub parametro in intercæptam QV,(a) hoc eſt $bb \ast ax$; ideo habebitur hujuſmodi æquatio $aayy$ diu: per xx, $\ast 2aby$ diu:per x, $\ast bb \propto bb \ast ax$, vel ablatis iis, quæ ſe invicem tollunt, factaque congrua multiplicatione per xx, nec non diviſioneper a, exurget hujuſmodi æquatio $x^3 - 2bxy \propto ayy$. Et patet propoſitum.

Similiter ſi conſtruenda proponatur hæc æquatio $byy \propto axx - x^3$, hac ratione conſtrui poterit. In figura ſeptima intelligatur quantitas x initium ſumere à puncto A, & per rectam ABV ad partes V ſeſe extendere; y verò ſupra hanc in dato angulo ABD; Sumta deinde AV æquali quantitati datæ a. Vertice V diametro VA, parametro data recta b, applicatæ autem ad diametrum VA ſint in angulo IBC dato angulo ABD æquali, parabola prima deſcribatur VGE: ſi enim Polo A, Intervallo BI, æquali parametro b, Directrice verò parabola EGV, Deſcribente CBD una ex applicatis, Efficiente verò AD, curva deſcribatur ADGV, hæc erit locus quæſitus; Si enim aliquod punctum in ipſa ſumatur, ut D, conſtruanturque omnia, ut in figura apparet, cum AB ſit x, BD verò y, & BI b, atquè AV a; erit BC by, diu:per x, BV verò $a - x$. quoniam autem quadratū BC, ſive $bbyy$, diu: per xx, æquatur rectangulo IBV(a), ſive $ba - bx$, habebitur hujuſmodi æquatio $bbyy$ diuiſa per $xx \propto ba - bx$, vel $bbyy \propto baxx - bx^3$, & facta congrua diviſione per b. $byy \propto axx - x^3$ Q. E. D.

Hujus autem curvæ proprietas ſimilis eſt proprietati parabolæ primæ, quam demonſtravit Pappus propoſitione ultima *lib.*4. *Collect. Math.* dummodò, quæ ibi de plano ab eodem dicta ſunt, hic de ſolido intelligantur. Etenim modo deſcripta curva ADGV hac proprietate pollet, ut ſumto in ipſa quolibet punctô, velut D, atque ab eodem ducta DB in dato angulo, ſolidum, quod continetur ſub quadrato AB in BV, æquetur ſolido ſub quadrato BD in parametrum, ſive In-

(a) 11. *lib. pr. Apoll.*

Intervallum *BI*, quæ quidem omnia ex allata æquatione patent; Quod ſi aliam demonſtrationem deſideras, en quomodo concinnavi. Cum ſimilia ſint triangula ABD, BCI (*a*) erit quadratum AB ad quadratum BD, ut quadratum *BI* ad quadratum *BC*; quoniam vero (*b*) quadratum BC æquatur rectangulo *IBV*; ergo ita erit quadratum AB ad quadratum *BD*, ut quadratum *IB* ad rectangulum *IBV*, vel ut IB ad *BV*; ergo (*c*) ſolidum ſub quadrato *AB* in BV æquatur ſolido ſub quadrato *BD* in parametrum BI. Q. E. D.

An verò hæc curva eadem ſit, ac illa, quam ſupra primam parabolam vocavi, pro certo affirmare non audeo, non enim mihi otium fuit, ut in hæc multum incumbere poſſem. Reor autem eandem omnino eſſe, quod & confirmare videntur ea, quæ mox addam: ſilentio enim præterire nolo, quod animadverſione dignum mihi viſū eſt, videlicet, quod ſi pro prima parabola VCE recta adhibeatur, curva genita ADGV, erit prima parabola, atque ex hac deſcriptione manifeſta redditur proprietas à Pappo tradita.

In figura enim octava, ſit triangulnm iſoſcele VAE, recta autem CBD parallela lateri AE pro Deſcribente habeatur, moveaturque in Directrice VE. Polus autem ſit A, in quo ſit Efficiens AD; Intervallum autem ſit data quælibet recta *BI*. Dico curvam ex interſectione Deſcribentis, Efficientiſque genitam, talem eſſe, ut ſumto in illa quolibet puncto, ab eoque ducta DB parallela lateri trianguli AE, rectangulum, quod continetur ſub intercæpta *AB* in *BV* æquetur rectangulo ſub intervallo BI in *DB*. Demonſtratio verò eadem ratione procedit, ac modo allata in ſuperiori curva. Quoniā iſoſcele eſt triangulum AEV, erit BC æqualis BV(*d*). Sed ſimilia ſunt triangula AB*D*, BCI, ergo rectangulum ABC, ſive ABV æquatur rectangulo IBD. Q.E.D. (*e*)

Quo-

(a) *Ex hyp.* 29. *pri.* & 4. *ſex.* & 20. *ſex.* (b) 11. *lib. pri. Apoll.* (c) 34. *Vnd.* (d) 4. *ſex.* (e) *ex hyp.* 29. *pri.* 4. *ſex*; & 16. *ſex.*

Quoniam verò idem omninò accidit, fuerit triangulum EAV rectangulum in A, nec ne, ideo facere nō poſſum, quin mirer, cur Pappus, omneſque alii, qui de hac parabolæ proprietate loquti ſunt (a), hanc conditionem appoſuerint, ut angulus EAV eſſet rectus, hoc eſt, ut DB ſit ad rectos angulos rectæ AV, id enim neceſſe nullo modo eſt: In parabola ſiquidem ADGV, ducta qualibet recta AV, atque ex quolibet hujus parabolæ, puncto, ut D ducta qualibet diametro parallela, rectangulum ABV æquabitur rectangulo, quod continetur ſub DB, & parametro pertinente ad eam diametrum, quæ ductam AV bifariam dividit.

Si verò iiſdem omninò ſtantibus, pro directrice VE curva parabolica VCE adhibeatur (vide figuram ſeptimam), in qua cubus cujuſcumque applicatarū æquetur ſolido ſub parametri quadrato in interceptā, curva deſcribetur ADCV, in qua hæc erit proprietas, ut planoplanum, quod continetur ſub cubo AB in BV æquetur planoplano ſub cubo DB in parametrum, ſivè Intervallum BI. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula ABD, DCI (b), erit cubus AB ad cubum BD, ut cubus BI parametri, ad cubum BC, vel ad ſolidum ſub quadrato BI in BV; ergo ut cubus AB ad cubum BD, ita BI ad BV, ergo &c.

Similiter ſi curva Directrix VCE hujus naturæ fuerit, ut quadratoquadratum applicatæ, æquetur planoplano ſub cubo parametri in interceptam, erit planoſolidum ſub quadratoquadrato AB in BV æquale planoſolido ſub quadratoquadrato BD in parametrum, & ita deinceps.

Ex harum verò proprietatum contemplatione non parva emanare poteſt rebus Geometricis utilitas, ego enim, qui hebetiori ingenio ſum, pulcherrimum, omniumque utiliſſimum problema abſolvere potui, quod videlicet attinet ad ma-

(a) *Franciſcus à Scoboten in comm. ad Cart. Geom.*
(a) *Ex hyp. 29. pri. & 4. ſex.*

maximum; atque minimum inveniendum; quamvis enim hujus problematis ſolutio eadem omnino ſit, ac ea, quam nobis ſcriptam reliquit Petrus ille Fermatius, clariſſimum Geometriæ lumen, & ſplendor; cognoſcere tamen quiſque poterit ex iis, quæ tradam, ita facillimum fuiſſe id ex his curvarum proprietatibus eruere, ut nullam in hoc mihi facem prætulerit Fermatiana Methodus.

Expoſitio autem inventionis noſtræ methodi ingrata iis nõ erit, quibus Fermatii methodus omninò perſpecta nõ eſt. At Tu, Vir ſupra cæteros præſtantiſſime, cui nihil adeo occultũ, abſcõditũve eſt, quod nõ manifeſtè pateat, ſi aliquãdo tantillum tẽporis, quo animum ſummis, maximiſque rebus gerendis aſſiduè incumbentem ſubleves, nactus fueris, hæc legere ne dedigneris; quamvis enim hæc, & longè difficiliora non te ſateant, ingrata Tibi forſan non videbuntur, alioſque inſuper ad hæc ulterius promovẽda exemplo tuo compelles, quemadmodum multi, Te præeunte, ad veræ virtutis culmen aſcendere potuerunt.

Sit data recta AV, in figura octava, oporteatque ita in aliquo puncto, ut I, ſecare, ita ut rectangulum ſub AI in AV, ſit omnium maximum. Hoc facile admodum eſt, colliguturque ex circulo, atque ex modo allata proprietate primæ parabolæ, ut prætercam, quod & in Elementis habetur*(a)*. Si verò datam AV, in figura ſeptima, ita in aliquo puncto, ut R, ſecare velimus, ut ſolidum, quod continetur ſub quadrato AR in RV ſit omnium maximum, curva ADGV, quæ primum locum poſt primam parabolam ſortitur, id præſtare poterit, modò in ipſa aliquod punctum inveniatur, ut G, ita ut ducta GR in dato angulo, ut opus erit, eadem GR ſit omnium maxima. Quod ſi data AV ita ſecanda in aliquo puncto, ut R, fuerit, ut planoplanum, quod continetur ſub cubo AR in RV, ſit omnium maximum, curva ADGV, quæ ſecundum poſt primam parabolam locum obtinet, idem

D etiam

(a) 27. ſex.

etiam præſtare poterit, ſi inveniatur punctum, ut G, ita ut ducta GR in angulo dato, eadem GR ſit omnium maxima: idem dicendum in aliis caſibus,adhibita convenienti curva. Quarè ſi regula tradi poſſet hæc puncta inveniendi, abſolutum eſſet, quod faciendum proponebatur. Sed hujuſmodi regula ita inveniri poteſt. Proponatur in curva AGV, cujus proprietas hæc eſt, ut ducta qualibet GR in dato angulo,ſolidum,quod continetur ſub quadrato AR in RV æquetur ſolido ſub quadrato GR in datam rectam,quæ ſit BI;proponatur,inquam ,inveniendum punctum, ut G ita, ut ducta GR ſit omnium maxima, quæ duci poſſunt,atque adeò,ut ducta recta ex puncto G ita invento parallela AV, tota extra parabolam cadat.Ponamus GR,in figura ſeptima,eſſe omnium maximam. AV autem data recta ſit a. Intervallum autem BI ſit b. at indeterminata AR ſit x; ergo RV erit $a - x$.

Quoniam verò ex proprietate hujus curvæ,ita eſt BI, ſive b,ad VR,ſive $a - x$,ut quadratū AR,ſive xx ad quadratū RG, erit quadratū RG $axx - x^3$ diu:per b,& hujus radix,hoceſt R.($axx - x^3$ diu:per b)erit ipſa RG.Quoniā verò hæc maxima eſt omnium, quæ ex quolibet puncto rectæ AV ad curvam ADGV duci poſſunt, fiet,ut ſi ſumatur aliud punctum,utB, atque ab hoc in dato angulo ducatur recta BD, hæc minor erit ducta RG,quarè ſi RB dicatur y.BA erit $x - y$. VB autem $a + y - x$; & quoniam ob eandem curvæ proprietatem, ita eſt data BI, ſive b, ad BV, vel $a - x + y$, ut quadratum AB, quod eſt $xx - 2xy + yy$ ad quadratum BD; erit hujus quadratū $axx - 2axy + ayy - x^3 + 3xxy - 3xyy + y^3$ diu:per b. latus verò BD erit hujus sūmæ radix.Sed hæc minor eſſe debet radice,ſive recta RG,hoc eſt R.($axx - x^3$diu:per$b$),quarè &quadratū BD,quod eſt $axx - 2axy + ayy - x^3 + 3xxy - 3xyy + y^3$ diu:per b, minus erit quadrato RG, ſive $axx - x^3$. diu:per b.Quoniā verò hæ duæ quantitates,quadratū nempe BD, & quadratum RG eundem habent denominatorem b, ideò omnibus per b, multiplicatis,eadē etiam manebit proportio, nempe hæc ſumma $axx - 2axy + ayy - x^3 + 3xxy$

$- 3xyy$

$-3xyy+y^3$, minor erit ſumma $axx-x^3$. Quoniam verò in utraque harum quantitatum eædem utrinque quantitates inveniuntur iiſdem ſignis affectæ, fiet, ut ſi tam à minori, quam à majori æqualia demantur, quod in minori ſupereſt, multò minus evadat quantitate, quæ in majori relinquitur; undè in appoſito exemplo, cũ ſublatis æqualibus, nihil in majori ſuperſit, erit $-2axy+ayy+3xxy-3xyy+y^3$ minor, quàm nihilo. Quarè facta tranſpoſitione, ita ut termini ſigno $-$ notati contraria nota afficiantur, erit quantitas $2axy+3xyy$ major quantitate $ayy+3xxy+y^3$. Quòd ſi omnia per quantitatem y dividiantur, eadem etiam permanebit proportio; undè quantitas $2ax+3xy$ major erit $ay+3xx+yy$. Quod ſi à minori quantitate aliquid auferatur; à majori verò nihil, major multo magis ſuperabit minorem; undè ſi à minori quantitate $ay+3xx+yy$ auferatur quantitas $ay+yy$. $2ax+3xy$ maior erit reliqua quantitate $3xx$, & facta diviſione per x; erit $2a+3y$ major $3x$. Patet itaquè quantitatem $3x$ non debere eſſe majorem quantitate $2a$; Si enim quantitas $2a$ minor eſſet $3x$. fieri poſſet, ut quantitas indeterminata y, ita eſſet parvula, ut quantitas $2a+3y$ etiam eſſet minor $3x$; quod eſſet abſurdum. Si verò quantitas $3x$ ponatur æqualis quantitati $2a$, quantulacumque ſumatur indeterminata y; ſemper tamen $2a+3y$ erit major $3x$; ac propterea ubicumque ſumatur punctum B inter A, & R ſemper tamen BD minor erit RG. Idem infra demonſtrabitur, ſi punctum ſumatur inter R, & V; undè ſi demta quantitate $3y$ fiat $2a$ æqualis $3x$ habebitur $x \infty 2a$ diu: per 3. Quarè ſi dividatur AV in R, ita ut AR contineat duas tertias ipſius AV, recta, quæ ex puncto R in dato angulo ducitur ad parabolam $ADGV$, ut RG, erit omnium maxima. Vnde patet, ſolidum ſub quadrato AR in RV eſſe etiam omnium maximum.

Quòd ſi punctũ B ſumatur inter R, & V, ut apparet factũ eſſe in T, atque RT dicamus y; erit AT æqualis $x+y$, TV verò $a-x-y$; undè operando, ut prius, quadratum TS er t

quan-

quantitas per hos terminos deſignata $yya + 2ayx + axx - 3xyy - 2yxx - x^3y^3$ diviſa per b; quod quidem quadratum minus eſſe debet quadrato GR, quod eſt $axx - x^3$, diu.per b,& demtis ex utraq; parte æqualibus,& facta multiplicatione per b; erit etiam, quæ relinquitur quantitas $ayy + 2ayx - 3xyy - 3yxx - y^3$, minor nihilo; vel facta congrua tranſpoſitione,ut omnia ſigna nota additionis afficiantur,erit quantitas $ayy + 2ayx$ minor $3xyy + 3yxx + y^3$. Omnia per y. dividantur, & habebitur $ay + 2ax$ minor $3xy + 3xx + yy$;quoniam autem quantacunq;ſumatur quātitas y; ſemper tamen minor eſſe debet data quantitate a; ideò,& quantitas ay,maior erit quantitate yy;quarè ſi à minori quātitate $ay + 2ax$ anferatur maior quātitas ay,à majori verò $3xy + 3xx + yy$ maior quantitas yy;erit etiam reliqua quantitas $2ax$,multò minor quātitate $3xy + 3xx$;quod ſi fiat diviſio per x,erit $2a$ minor $3y + 3x$;Vndè colligitur, quantitatem indeterminatam $3x$ non debere eſſe minorem a:ſed ſuprà demonſtravimus non debere eſſe maiorem?ergò æqualis erit:quod à multis demonſtratum eſt,noviſſimè verò,ſimpliciſſima,atque omnium elegantiſſima methodo(a) ab Antonio Monfortio,Viro omnium virtutum genere ornatiſſimo, nulliqne in Mathematicis ſecundo; à quo brevi, Deo favente,omnibus numeris abſolutiſſimā Aſtronomiam expectamus. Idem omnino accidit ſi curva ADGV fuerit parabola,aut tertii,aut quarti generis, & ita deinceps.Quare facillimum erit,ſequentem hunc canonem formare.

Fiat prima poſitio ſub una ignota, formeturque maximum; tum ſecunda fiat poſitio ſub eadem primo loco poſita ignota, & altera inſuper ingnota, formeturque iterum maximum, fiat inter hæc duo producta adæquatio; atque eæ deindè quantitates expungantur, in quibus ignota ſecunda ad quadratum, vel ad altiorem poteſtatem aſcendit. Item ea,quæ ſe mutuò tollunt;tum fiat di-

di-

(a) *In ingenioſiſſimo tract.de probl.determ.*

viſio, tam per primam, quam ſecundam ignotam, dum fieri poteſt, habebiturque æquatio inter datam quantitatem, atque ignotam. Sit exempli gratia data *A*V, quam dicamus *a*; ita in puncto R ſecanda, ut rectangulum ſub ſegmentis, ſit omnium maximum. Ponamus *A*R eſſe x. ergo RV erit *a*—*x* maximum erit *ax*—*xx*. Rurſus ponatur *A*R *x*+*y*; RV erit *a*—*x*—*y*. Maximum verò erit *ax*+*ay*—*xx*—2*xy*—*yy*. Sic facta adæquatione, ablatiſque auferendis, quantitatibus videlicet *ax*—*xx* & *yy*. habebitur *ay*—2*xy*∞o, vel *ay*∞2*xy* fiat diviſio per *y*; & exurget *a*∞2*x*. quod ab Euclide, & aliis ſexcentis demonſtratum eſt. Hæc autem ipſiſſima methodus eſt, quam nobis tradidit Fermatius, à quo quidem alia ratione inveniri potuit, ut etiam demonſtrare poſſem, ſed vereor, ne te nimia moleſtia afficerem.

Quid verò dicam de conſtructione æquationum, in quibus una ignota reperitur, quæ quidem facillimè jam cõſtrui poſſunt harum curvarum ope, cujuſque eæ dimenſionis fuerint? Equidem non me latet, multos de his verba feciſſe; quia verò his curvis ad illarum conſtructionem uti coacti fuere, nec quomodò hæ deſcribi poſſent demonſtrarunt, dicendum abſque iniuria eſt, quæcunque hactenus dicta fuere, manca, atque imperfecta fuiſſe: nunc autem eò reducta res eſt, ut quicquid ſub geometriam cadit enodari, atque reſolui poſſit, non ſecus, ac æquicrure triangulum ab Euclide conſtructum eſt.

Si enim verbi gratia proponantur inveniendæ quatuor mediæ continuè proportionales inter duas datas, quarum primam vocemus *a*. extremam autem *b*, id facillimè abſolui poteſt, quemadmodum inter duas datas una proportionalis inveniri poteſt. Ducta enim qualibet recta, ut AE fig. 4. vertice A, parametro recta, quam vocavi *b*; axe verò AE ſecunda parabola deſcribatur ADQ. Tum ex puncto A ducatur recta AB ipſi AE ad angulos rectos; ſi tamen AE ſit axis parabolæ; ſumta deindè *A*B æquali primæ ex datis, nempe *a*. ducatur ex puncto *B* recta *B*D parallela ipſi AE, atque ipſi AB æquali: tum aſymptotis AB, AE ex puncto T Apolloniana hy-

hyperbola ODO deſcribatur; quæ quidem ſecundam parabolam ADS in aliquo puncto ſecabit. Secet itaque in D, atque ex puncto D ducta DE parallela ipſi AB, hæc erit prima ex quæſitis, nec demonſtratione opus eſt, ita manifeſtè patet. Sed nec difficiliori ratione quælibet alia problemata cujuſcũque ea ſint generis, harum curvarum ope enodari poſſunt, quemadmodum ex allatis in ſequẽtibus epiſtolis exemplis colligi poteſt.

Atquè hæc ſunt, Dux Excellentiſſime, quæ exiguo temporis intervallo de harum curvarum ortu, atquè in plano deſcriptione concinnare potui, ne vacuus ad Te accederem, utquè magis perſpectam haberes animi mei propenſionem, atque obſequium. Reliquum eſt, ut Te etiam, atque etiam rogem, ut pro Tua in omnes, ſed in eos præcipuè, qui his ſcientiis addicti ſunt humanitate hilari hæc vultu ſuſcipias; quanquam enim nihil, quod à te legatur dignum contineãt; hoc certè ipſis boni ineſt, quòd ea mihi inventa ſunt dum otio affluo, quod mihi facit Illuſtriſſimus, & Excellentiſſimus Dominus meus D. Hyeronimus Cabanilius, qui Tibi nõ ſolum arcto ſanguinis vinculo, ſed & Theſeæ amicitiæ neceſſitudine coniunctiſſimus eſt: Quarè hæc ſpernenda Tibi non ſunt, utpotè quæ ad Propinquo, & Amico Tuo proveniunt; mihi verò, quia Te, Eundemque ſummo amore obſervo, & colo, da, atque largire hoc, ut merear in tuorum numerum recipi; id enim ſi mihi aſſequi contigerit ſublimi feriam ſidera vertice. Vale, maximum Italiæ Decus, ac Splendor literarumque omnium dulce Præſidium. Ex S. Marci Oppido. XVII. Kalend. Sext.

EPISTOLA
SECVNDA
Ad Illuſtriſs. & Ampliſs. Virum Dominum
D. DIDACVM
VINCENTIVM A VIDANIA,

Regii Sacelli Præſulem, Gimnaſii Neapolitani Præfectum, Regiarum Eccleſiarum S. Nicolai in Pargoleto, & in Buciſano Abbatem Catholico Monarchæ à Conſiliis in ſupremo S. Inquiſitionis Hiſpaniarum ſenatu, Generalem Viſitatorem ſiculi Tribunalis Fidei, &c. in qua de geneſi, atque plano deſcriptione infinitarum hyperbolarum, atque Ellipſium agitur.

Digitized by Google

Illuſtriſs. atque Ampliſs. Viro D.

D. DIDACO VINCENTIO

A VIDANIA

Regii Sacelli Præſuli, & Gymnaſii Neapolitani Præfecto, &c.

BARTHOLOMÆUS INTIERI S.P.D.

CUr Tibi, Vir Ampliſſime, hæc mittam, quæ paucis ab hinc diebus reperire mihi contigit, multæ quidem, eæque non levis momenti cauſæ ſunt. Aſſidua cura, atquè diligentia, quam in ſcientiis omnibus promovēdis adhibes, multi apud me ponderis fuere. Vna eorum omnium, qui literarum ornamento fulgent, vox, quæ Te ſupra æthera extollit, me maximè movit. Impulere Maximorum Virorum exempla, qui Tibi labores ſuos, queis æternam ſibi nominis famam adepti ſunt, dicarunt, ſacraruntque; quemadmodum factum videmus ab omni ſcientiarum genere ornatiſſimo Dominico Auliſio, & ſexcentis aliis, quos hic recenſere longum eſſet. Nec tamen id facio, ut in horum Virorum numerum referri præſumam; ſed ut cuicumque notum, perſpectumque ſit, me nulli in Te amando, atque obſervando manus dare. Coëgit de-

niquè me, ut verum fatear, id, quod quiſque novit, Tua videlicet hæc eſſe, ſi quid boni continent, quæ Tibi non offero, ſed reſtituo potius: Tuo enim juſſu, Tuiſque auſpiciis inventa fuere; undè æquo jure nulli, niſi Tibi dicanda erant. Etenim cum noviſſimè maximo ſanè Mathematicarũ, atque adeò ſcientiarũ omniũ bono de nova, atq; optima in his diſciplinis inſtituendæ Iuventutis ratione maxima, ſicut in cæteris omnibus Tibi mos eſt, animi attentione, atque vigilantia curas; quicumque Matheſi operam dat, ut Tibi morem gerat, utque coram Te, atque Illuſtriſſimo Senatu ſui ſpecimen præbeat, poſſitne inſtituendæ Iuventutis munus obire, majore animi contentione in hæc ſtudia incumbit; ipſe ex iis unus, dum Carteſianam Geometriam, quam explanandam juſſiſti, paulò attentius mentis oculis inſpicio, in hæc incidi, quæ ex Te emanaſſe nullus, ut reor, inficias ibit. Ideò autem Typis hæc eadem committere decrevi, cum, ut quãtũ pro mea virili valeo Geometriæ ſtudioſis gratũ facerem, atque aditum ad majora patefacerem, tum, ut ea præſtarem, quæ Tibi pollicitus ſum, videlicet, ut Te coram, Illuſtriſſimoque Senatu de Geometria verba facerem; ex his enim colligere quiſque poterit, me non temerè in arenam deſcendiſſe; dum non ſolum difficillima, quæ communi omniũ cõſenſu in Carteſiana Geometria sũt, explicanda ſuſcepi, ac de quibus ne ullum quidem verbum ab iis factum eſt, qui in eandem commentaria edidere; ſed & ea addidi, quibus manifeſtè apparet, quomodò longè ulterius eadem Geometria promoveri poſſit; ita ut dicere non verear, multa hoc ſæculo detegi poſſe, quæ Priſcis ignota fuere; modò omnes, quibus mecum in eodem ſtadio currendum eſt, tantundem, ac ego incrementi huic ſcientiæ attulerint; quarè eos enixè rogo, atque obteſtor, ne ea, quæ ab ipſis inventa, atque excogitata fuere, ſepulta apud ſe jacere patiantur, ſed in omnium commodum, atque utilitatem publicæ luci tradant: ſic enim fiet, ut & majorem ſibi gloriam comparent, maturiuſque de iis judicium ferre valeant, quibus hoc onus incum-

bit,

bit; difficile enim eſt de his diſciplinis judicare, niſi prius oculis ſubiiciantur. Sed, ut mentem meam accipias paucis hic exponam, de quibus diſſerendum mihi eſt.

Cum non multo ab hinc tempore invenire mihi cōtigiſſet methodum deſcribendi parabolas, quæ magis, magiſque in infinitum ſe excedunt, idque tanta, ut puto, facilitate, ut nihil penitus interſit inter circuli, & illarum cujuslibet deſcriptionem; cumque animadverterem harum curvarum contemplationem, cognitionemque plurimum rebus Geometricis conducere, quemadmodum ex paucis iis, quæ in prima epiſtola demonſtrata ſunt, facile eſt colligere, totus in hoc deindè eſſe cæpi, ut & hyperbolarū, quæ Apollonianā, ſivè planam hyperbolā conſequuntur, geneſim, atque in plano deſcriptionem inveſtigarem: putabam enim, non ingratum, nec iniucundum Geometris præſtiturum, ſi eos ad harum curvarum contemplationem, ex qua uberrimi fructus colligi poſſunt, detecta via, invitarem: quoniam verò in deſcribendis in plano parabolis, quæ ſe magis, magiſque in infinitum excedunt rectam iniſſe viam mihi, ni fallor, contigit (a), ideò, non ſine ingenti animi mei voluptate, ſtatim ſeſe etiam mihi obtulit facillima methodus, qua & hyperbolæ magis, magiſque in infinitum ſe excedentes in plano deſcribi poſſunt, earumque præcipuæ proprietates eadem deſcriptione erui; quod multò quidem mihi jucundius accidit, quia anſa mihi dari cognoſcebam, qua animum meum Tibi aperirem, qui Te unum ob egregias animi Tui dotes veneratur, & colit.

Primò itaquè planæ hyperbolæ deſcriptionem aggrediar, deindè verò cæterarum, id autem ſimpliciſſimo ordine. Demonſtrationes verò afferam Veterum Geometrarum more, nec tamen ſi Tibi magis Algebra arrideat, Algebricas prætermeam. Poſtremò autem pauca afferam de iis curvis, quæ circulum, atque ellipſim excedunt. En autem quomodò planæ,

 ſivè

(a) *Vide pr. Epiſtolam.*

ſive Primæ hyperbolæ(ita deinceps appellarè libet Apollonianam hyperbolam) deſcriptionem facillimè perago.

In figura prima hujus ſecundæ Epiſtolæ, ſint rectæ FB, KL, ſeſe in puncto A ad quoslibet angulos interſecantes; ſumtoque in recta LAK quolibet puncto, ut K, ducatur ex eodem recta KC parallela ipſi AB. Intelligatur deinde recta CED indefinita ad partes D ſemper ſibi ipſi, & rectæ KAL parallela moveri, ita ut ejus punctum C maneat ſemper in recta KC; hoc autem motu ſecum ducat rectam AC circulariter mobilem in puncto A, ita ut ſemper tranſeat per datum punctum C. In recta autem AB indefinitè producta ad partes B data recta conſtituatur EB, quæ liberè per eandem AB excurrere poſſit, ita tamen ut ſemper in illa applicata maneat. Hāc autē EB movere faciat recta CED, ita ut altero ſui puncto E hæreat ſemper in recta CED, velut in figura apparet. In reliquo verò extremo ſui puncto B recta BD indefinita ad partes D conſtituatur, circulariter in eodem puncto B mobilis, quæ quidem BD ita moveri concipiatur, ut ſemper parallela maneat rectæ AC. Hæc igitur curva BD rectam CED in aliquo puncto interſecabit, ut D. Dico ex hac interſectione curvam DO generari, quæ hujuſmodi pollebit proprietate, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, velut D, ductaque DE parallela AL, ipſique AB occurrente in E, rectangulum, quod continetur ſub rectis AE, ED, æquetur dato rectangulo; ei videlicet, quod continetur ſub datis CE, EB. Sumto quippe in curva hac ratione deſcripta quolibet puncto, ut D, conſtitutiſque rectis CD, CA, EB, BD in ea ſtatione, uti fuere, cum ipſarum motu, atque interſectione deſcriptum eſt punctum D(ne verò eadem ſæpius repetendo aures Tibi obtundam; id ſemper fieri intelligatur, quoties opus erit ad aliquā demonſtrationem concinnandam) quia itaquè AC, BD parallelæ ſunt, ſimilia erunt triangula BED, CAE *(a)*; quarè ita erit BE, ad ED, ut AE ad EC; ergo rectangulum BEC, quod

(a) *Ex hyp. 29. pr. & 4. ſex.*

quod eſt datum, æquatur rectangulo AED (a). Cumque id ſemper eveniat, ubicumque aſſumtum fuerit punctum D; patet, quod erat demonſtrandum.

Atque ex hac curvæ proprietate manifeſtè apparet, hanc eandem eſſe, quæ ab *Apollonio* hyperbolæ nomine nuncupatur, rectas verò AB, AL eaſdem, quæ *Aſymptoti*; Punctum autem *A*, centrum hujus ſectionis. Hyperbolæ autem potentiam quadratum æquale dato rectãgulo CED. Quod verò ſimpliciſſima,& maximè hyperbolæ geneſi conſona ſit hæc methodus, vel ex eo patet,quod ex ipſa deſcriptione atque in plano generatione, ultro ſe prodit præcipua ejuſdem curvæ proprietas, ipſiuſque demonſtratio, tanta quidem facilitate, ut pro certo habeam, nullam excogitari poſſe, quæ cum hac elegãtia comparari poſſit. Accedit etiam,quod unico, & ſimpliciſſimo motu oppoſitas etiam ſectiones (ut verbis uſu receptis utar) deſcribere faciliſſimum erit: ſumta enim AL æquali AK, ſi ex eodem puncto L recta LI agatur parallela rectæ FAB; recta autem CA uſque ad I producta, dum in puncto A rotatur, rectam IGH indefinitam ad partes H movere concipiatur ita,ut eadem IGH ſemper ſibi ipſi,ac rectæ KAL parallela exiſtat, quæque etiam dato ſui puncto I, in quo ſemper reperiri debet recta *CAI*, maneat in recta IL; motu autem ſuo movere etiam faciat datã rectam GF æqualem datæ EB, quæ quidem GF in recta FAB applicata ſemper maneat, quemadmodum ſuprà de recta EB dictum eſt, atque altero ſui puncto G hæreat perpetuò in recta IGH; in reliquo verò extremo ſui puncto F infixam habeat rectam FH indefinitam ad partes H, quæ etiam circulariter in eodem puncto mobilis ſit, perpetuòque parallela exiſtat rectæ IAC: hæc itaque recta FH rectam IGH in aliquo puncto interſecabit, quæ quidem interſectio curvam HO deſcribet, quæ oppoſita hyperbola erit curvæ modò genitæ DO; quemadmodum manifeſtè apparet. Hinc faciliimè etiam colligi po-

(a) 16. ſex.

poteſt; curvas hac ratione genitas magis, magiſque ad utramque aſymptotum AB, AL, vel AK, AG accedere, numquam tamen ad ipſa pervenire. Item rectas, quæ per centrum A tranſeuntes in oppoſitis hyperbolis terminantur bifariam in odem centro dividi, quemadmodum in recta HAD demonſtrari poteſt. Item quomodo datis quibuslibet aſymptotis AE, AL, & punctum intra ipſos, ut D, hyperbola deſcribi poſſit per datum punctum tranſiens; quæ quidem omnia non ſine longa, molœſtaque propoſitionum ſerie ab Apollonio, & cæteris demonſtrata ſunt. Tantæ molis eſt, rectã, ſimpliciſſimamque in Mathematicis inire viam; quæ ſi priſcis illisGeometris in aperto fuiſſet, ulteriùs ſectionum conicarum doctrinam promoviſſent, nec ſolum in hyperbolæ, Parabolæ, atque Ellipſis contemplatione perſtitiſſent, ſed ad cæteras curvas conſiderandas, atque explanandas provecti perfectiorem Geometriam non ſine magno laborum, molœſtiarumque, quæ nos manent, compendio tradidiſſent: methadus enim ſupra expoſita, rectà ad alias hyperbolas detegendas nos ducit, ut mox demonſtrabo: quod an aſſequi poſſibile ſit, ex illa conorum, vel aliorum ſolidorum ſectione, nec ſcio, nec intelligo: videant qui plus otii, quam ego, nacti ſunt.

Sed antequã ad cæteras hyperbolas deſcribẽdas accedam, operæ pretium duxi, demonſtrare quomodo ex motu rectæ CE, ſivè AC fieri poſſit, ut BD, quæ infixa intelligitur in pũcto B, ita circa illud rotari queat, ut ſemper maneat parallela rectæ BD; ita enim fiet, ut magis pateat hujus methodi facilitas, atque elegantia, utque ad praxim revocari poſſit, ſi cui ſorte libeat.

In figura itaque ſecunda rectæ AC, CED, BD, EB eodem ut ſupra, motu fieri debeant, ut ubicumque reperiatur CE, recta AC tranſeat ſemper per ipſius punctum C, BD verò ſemper per punctum B tranſiens parallela eſſe debeat rectæ AC, & reliqua, ut ſupra. Intelligatur recta CED indefinita ad partes D pertuſa in extremo ſui puncto C, ut AC liberè

in

in puncto C excurrere poſſit, ita eodem ſui puncto C applicata eſſe in recta KC,ut dū ipſa à recta AC circulariter mobili in pūcto A moveri cogitur,vel ipſa ſe movet,sēper eoſdē angulos cū KC faciat, hoc eſt,sēper ſibi ipſi, vel rectæ KAL parallela exiſtat; recta autem data EB fixa ſit in pūcto E rectæ CD, ut excurrente CD ad partes S, & EB ad eaſdem partes in recta AB tendat, &c. At recta AC infixam ſtabilemque habeat in puncto A rectam AH indefinitam ad partes H,angulus vero HAC æquetur angulo KAB.Item pertuſa intelligatur in in puncto B recta BE,ita ut per ipſum trāſiens BD liberè etiam excurrat, atque eadem BDH ita annexa ſit rectæ AH, ut cum ipſa ſemper faciat angulum BHA æqualem angulo CAH, atque etiam in ipſa liberè excurrere poſſit. Fiet itaque, ut dum recta AC circulariter in puncto *A* movetur, rectæ CD, EB, BD talem perpetuò poſitionem habeant, ut AC ſemper tranſeat per punctum C, EB, maneat applicata in recta AB, BD tranſeat per punctum B, atque inſuper parallela rectæ AC, cum angulus BHA æquetur angulo CAH; atque adeò unico motu rectæ CA,vel CF, non ſolum propoſitam curvam, ſed & oppoſitas etiam deſcribere facillimum erit.

Quoniam vero in ſequentibus ſæpiſſimè rectarum CD, DB, EB, KC, nec non puncti A, mentio facienda eſt, ideò ne Tibi nimiæ molœſtiæ ſim, his nominibus deſignabo, atque rectam CED vocabo DESCRIBENTEM. DB autem EFFICIENTEM: EB verò INTERVALLVM. KC,ſivè recta, ſivè curva fuerit DIRECTRICEM.At punctum A,POLVS nuncupabitur. His verò præmiſſis ad ſecūdæ hyperbolæ deſcriptionem venio.

Secunda hyperbola illa eſt, in qua ſolidum ſub quadrato AE in ED (vide figuram primam) æquatur dato ſolido,ſivè illa eſt ſecunda hyperbola, in qua data recta eandem habet proportionem ad eam,quæ ex quolibet hyperbolæ puncto parallela uni ex aſymptotis ducitur, atque alteri aſymptoto terminatur, velut DE, ut quadratum illius, quæ inter cen-

centrum, & modò ductam intercipitur, ut *A*E, ad datum quadratum. Quod verò hæc ſecunda hyperbola dicenda ſit, hinc patet. Prima, ſive *A*polloniana hyperbola illa eſt, in qua data recta eandem habet proportionem ad DE, ut intercæpta AE ad aliam datam. Quoniam verò poſt latus quadratum ſubſequitur, ideò & poſt primam hyperbolam illa ſubſequetur, in qua data recta eandem habebit proportionem ad DE, quam applicatam vocabo, ut intercæptæ *A*E quadratum ad datum quadratum; ac propterèa illa ſecunda dicenda eſt, ſivè cubica. Similiter tertia, ſivè quadratoquadratica hyperbola illa eſſe dicetur, in qua ita eſt data recta ad applicatam DE, ut intercæptæ AE cubus ad datum cubum; & ita deinceps in aliis altioribus. Sed ne putes, Vir ampliſſime, multis me expoſiturum, quomodò ſecunda, & cæteræ deinceps hyperbolæ deſcribendæ in plano ſint; paucis enim me expediam; etenim nil aliud eſt faciendum, quàm Directricem AC immutare (vide fig. 1. & 3.) & modò deſcriptam primam hyperbolam adhibere, cujus aſymptoti ſint *A*K, AE, centrum verò A, potentia autem quadratum quodcumque, videlicet, quod ſit à recta data E*B*; ſi enim Polo A, *De*ſcribens CED per hanc *D*irectricem incedere intelligatur, motu autem tuo movere faciat Efficientem *D*B, atque intervallum BE, ex interſectione Deſcribentis C*D*, Efficientiſque *B*D curva DO deſcribetur, quæ ſecunda hyperbola erit; cujus aſymptoti erunt rectæ AL, AB, hoc eſt aſymptoti primæ hyperbolæ *D*irectricis, centrum verò A: præcipua verò proprietas erit, ut ſolidum ſub quadrato cujuſcumque intercæptæ *A*E in applicatam ED æquetur ſolido, quod continetur ſub Directricis potentia in Intervallum BE. Hæc autem pro hujus curvæ geneſi, atque deſcriptione ſatis dicta ſint, nunc demonſtrationem paucioribus afferam. Cõſtructis omnibus, ut in figura tertia apparet, quadratum AE ad rectangulum AEC eandem habet rationem, ac AE ad EC (*a*): ſed rectangu-

(a) *Prima ſex.*

gulum *A*EC ex proprietate hyperbolæ æquatur ejuſdem potentiæ (*a*); ergo ita AE ad EC, vel ita EB ad ED (*b*)ut quadratum AE ad potentiam hyperbolæ Directricis; ergo ſolidum ſub quadrato AE in rectam ED æquatur ſolido ſub potentia hyperbolæ in Intervallum (*c*). Q. E. D. Atque hæc demonſtratio, præterquam quod elegantiſſima mihi videtur, locum etiam habet in altioribus hyperbolis, quemadmodum in ſequentibus manifeſtum fiet. *A*beant ergo *A*polloniani illi Coni, dum tanta elegantia, atque facilitate, & quæ illi faciunt, & lōgè majora hæc methodus præſtat. Quod autem rectæ AL, *A*B ſint hujus ſecundæ hyperbolæ aſymptoti, hinc patet; quia ſumtis in curva duobus punctis D, *d*; ductiſque rectis, ut in figura apparet factum; ita eſt AE quadratum ad *Ae* quadratum, ut *ed* ad ED; ſed recta AE minor eſt recta *Ae*? ergò & *ed* minor eri ED; undè colligitur curva D*d*. O magis ſemper, magiſque accedere ad rectam AB *e* Similiter demonſtrari poteſt ſemper etiam accedere ad rectam *A*L: Notandum tamen eſt, hanc curvam non æquè ad aſymptotos accedere; nam ſumtis duobus punctis æquè remotis à centro *A*, ut *e*, L ductiſque, *ed* parallela aſymptoto *A*L, LO autē aſymptoto AE, major erit LO ipſa *ed*, ut in appoſita figura videre eſt; quod multi non cognoverunt, qui harum curvarum geneſim ignorantes, eiſdem pro problematum conſtructione uſi ſunt, quemadmodum ex figura, quam his curvis tribuerunt, colligere eſt. Similiter etiam patet, punctum A centrum vocari poſſe.

Hæc autem ſecunda, ſicut & cæteræ deinceps hyperbolæ oppoſitas etiam habent, quæ pari facilitate, ac in prima factum eſt deſcribi poſſunt: deſcripta quippè in angulo GAL hyperbola IO, oppoſita primæ hyperbolæ CO; ſi recta CA uſque ad oppoſitam in I producatur ita, ut motu tuo movere

F etiam.

(a) *Ex iis, quæ ſupra dicta ſunt*. (b) 29 *pr*. & 4. *ſex*. (c) 34. *Und*. (d) *ex modò demonſtratis*.

etiam faciat rectam IGH parallelam aſymptoto LK, quæque Deſcribentis officium ſubeat; hæc autem movere faciat Intervallum GF æquale Intervallo BE, nec non Efficientem FH, curva HO, quæ ex interſectione Deſcribentis, Efficientiſque producitur oppoſita ſecunda erit hyperbolæ DO, cujus quidem proprietas erit, ut ſolidum ſub quadrato interceptæ GA in applicatam GH æquetur ſolido, quod fit ex potentia primæ hyperbolæ Directricis in Intervallum GF, quod quidem demonſtratione non eget. Sed jam ad tertiæ hyperbolæ deſcriptionem accedamus.

Tertia autem hyperbola ex iis, quæ ſupra diximus, illa eſt, in qua planoplanū ſub cubo interceptæ in applicata æquatur planoplano dato; vel in qua data recta eandem habet proportionem ad applicatam, quæ, in eadem figura tertia, per rectam DE deſignatur, ut interceptæ AE cubus ad datum cubum. Hujuſmodi autem curva hac ratione deſcribitur. In eadem fig.3. iiſdem, ut ſupra, poſitis, Directrix CO intelligatur eſſe ſecūda hyperbola modò genita, cujus aſymptoti ſint AB, AK, centrum A: ſolidum autem ſub quadrato interceptæ AE in EC æquetur dato ſolido: curva enim DO, quæ ex interſectione Deſcribentis CD, atque Efficientis BD producitur tertia hyperbola erit, cujus quidem centrum erit Polus A, aſymptoti autem AB, AL; cujuſque hæc erit proprietas, ut planoplanum ſub cubo AE in ED æquetur planoplano ſub potentia hyperbolæ Directricis CO in datam rectam, ſivè Intervallum EB: ſumto enim in ipſa quolibet puncto, ut D; omnibuſque conſtructis, ut in figura apparet, cubus AE ad ſolidum ſub quadrato eiuſdem AE in EC, hoc eſt ad potentiam hyperbolæ CO *(a)*; ut AE ad EC, vel ut *BE* ad *ED*, *(b)*; ergo & ut BE, ſivè data recta ad applicatam *DE*, ita cubus AE ad potentiam hyperbolæ CO, ſivè ad datum ſolidum *(c)*; ergò & planoplanum ſub cubo AE in rectam

ED

(a) *Ex propr. ſec. Hyperb.* (b) *29.pr. & 4.ſex.*
(c) *4.Quinti.*

ED æquabitur dato planoplano. Q. E. D.

At neque hic immorabor in demonſtrando, quomodo oppoſitam huius hyperbolæ deſcribere poſſibile ſit, id enim tempus terere eſſet, cum manifeſtè id per ſe pateat, ſuppoſita Directrice IO non prima, ſed ſecunda hyperbola, ut ſupra factum eſt; quarè quartæ hyperbolæ deſcriptionem aggrediar.

Quarta autem hyperbola, ex ſupra allatis, illa eſt, in qua plano ſolidum ſub quadratoquadrato interceptæ *A*E in applicatam ED æquatur dato planoſolido; vel in qua ita eſt data recta ad applicatam ED, ut quadratoquadratum interceptæ AE ad datum quadratoquadratum. Hæc autem curva ab hac præcipua proprietate quadratoſolida etiam vocari poteſt. Ita autem facillimè deſcribitur. In eadem figura 3. Omnibus etiam, ut ſupra poſitis, Directrix CO ſit tertia hyperbola, cujus aſymptoti ſint AB, AK, centrum verò A: curva ſiquidem DO, quæ Deſcribente CD, Efficiente BD, Intervallo EB, Polo autem A deſcribitur quarta, ſivè quadratoquadratica erit, cujus quidem centrum erit A, aſymptoti autem AB, AL, planoſolidum verò, quod continetur ſub quadratoquadrato AE in rectam ED æquabitur planoſolido ſub potentia hyperbolæ Directricis CO in Intervallum EB; etenim quadratoquadratum à recta AE eandem habet proportionem ad planoplanum ſub cubo A*E* in rectam CE, hoc eſt ad potentiam hyperbolæ CO (*a*), ut *A*E ad EC; vel ut E*B* ad ED (*b*): ergo & ut EB ad ED, ita quadratoquadratum AE ad potentiam hyperbolæ CO(*c*); ergò planoſolidum ſub quadratoquadrato AE in ED æquatur dato planoſolido. Q. E. D.

Oppoſita verò hujus hyperbolæ faciliter etiam deſcribi poteſt, ſi ponamus curvam IO tertiam hyperbolam eſſe, velut in cæteris ſupra factum eſt.

F 2 At-

(a) *Ex proprietate Tertiæ hyperbolæ.* (b) *29.pr. & 4.ſex.* (c) *4.Quinti.*

Atque hæc eſt methodus, qua utor in deſcribendis his curvis, cuius quidem beneficio omnes hyperbolæ, quas quis imaginatus fuerit deſcribi poſſunt; ſicut enim Primam Secundam, Tertiam, & Quartam deſcripſi, ita & Decimam, Centeſimamque deſcribere non difficile erit, modò ea adhibeatur Directrix, quæ proximè deſcribēdam anteit; quemadmodum ex modò deſignatis curvis colligitur. Quarè plurium deſcriptionem in medium non afferam, ne Te moleſtia, potiuſquam jucunditate afficiam; ſatis enim ſuperque huius methodi præſtantia uſquè adhuc patuit, clariuſque in ſequentibus patebit, cum aliqua de locorum compoſitione tradam.

Poſſem quoquè plures alios modos adducere, quibus hæ curvæ deſcribi poſſunt, qui quidem plurimi ſunt. Verum quià nullus ita ſimplex, faciliſque mihi viſus eſt, quam quo ſupra uſus ſum; ideò omnibus prætermiſſis, hunc ſolum breviter exponam, qui originem à Parabola trahit; fieri ſiquidem poteſt, ut & huius contemplatio aliquid etiam utilitatis afferat.

In figura itaquè quarta vertice A, diametro AEB, parametro data EB Parabola prima deſcribatur AC ita, ut applicatæ ad diametrum AE ſint rectæ omnes parallelæ rectæ AK, quarum unam recta CE repræſentat: hæc autem applicata CE moveri concipiatur ſemper ſibi ipſi parallela ita, ut certo ſui puncto C maneat ſemper in Parabola, ſecumque ducat rectam AC circulariter mobilem iu vertice A; movere item applicata DC faciat rectam datam EB ita, ut ſemper applicata maneat in parabolæ diametro, atque in extremo ſui puncto B rectam habeat BD indefinitam ad partes D, quæ circulariter moveri poſſit in eodem puncto B; hæc autem BD parallela ſemper exiſtat rectæ AC; Vno verbo: AC parabola ſit Directrix, CDE Deſcribens, BD Efficiens, EB Intervallum, vertex A Polus, ut ſupra dictum eſt; Dico ex interſectione Efficientis, Deſcribentiſque curvam DO generari, quæ ſecunda hyperbola erit; cuius aſymptoti

ptoti, recta AL parabolam in vertice A tangens, & AB diameter; centrum verò A; cujuſque hæc erit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D, ductaque DE parallela aſymptoto AL, ſolidum ſub recta AE in quadratum ED æquetur dato ſolido, quod fit ex quadrato Intervalli EB in parametrum parabolæ; vel ut parabolæ parameter ita ſit ad EA, quemadmodum quadratum ED ad datum quadratum Intervalli. Quoniam ex hypoth: ſimilia ſunt triangula ACE, DEB(*a*), erit ut quadratum CE, ſivè rectangulum ſub *AE*, & parametro ad quadratum *AE*, hoc eſt ita parameter ad *AE*, ut quadratum *DE* ad quadratum Intervalli *BE* (*b*); & patent omnia, quæ demonſtranda erant.

Oppoſita verò hyperbola hujus ita deſcribi poteſt. Eodem vertice A, diametro verò eadẽ *AE* ad partes G producta, parametroque eadem data *EB*, parabola prima deſcribatur AI, quam pro Directrice aſſumemus ita, ut Deſcribens ſit IGH applicata ad diametrum *A*G, necnon parallela ipſi CD; Efficiens verò ſit FH, Intervallum FG æquale *EB*; nam curva HO, quæ oritur ex interſectione Efficientis, Deſcribentiſque oppoſita erit.

Similiter ſi tertiam hyperbolam deſcribere velimus. Omnibus, ut ſupra, poſitis, pro prima parabola AC Directrice, ſecunda conſtituenda eſt ita, ut cubus cujuſcumque ex applicatis æquatur ſolido ſub quadrato intercæptæ in parametrum(*c*). Dico curvam DO tertiam hyperbolam eſſe, in qua ſecũdæ parabolæ AC parameter eandem habebit proportionem ad *AE*, ut cubus *ED* ad cubum Intervalli *EB*. Demonſtratio verò eodem modo procedit; etenim cum ſimilia ſint triangula *ACE*, *DEB*, erit cubus *CE* ad cubum AE; ſivè ſolidum ſub quadrato AE, & parametro ad cubum *AE*; vel ita parameter ad *AE*, ut cubus *DE* ad cubum Intervalli *EB*(*d*), & patet propoſitum. Quod

(a) *19.pr.& 4.ſex.* (b) *1.& 20.ſex, & 11.lib.pr.Apoll.*
(c) *Vide 1.epiſt.* (d) *37.Vnd.& per ea, quæ in 1.epiſt. demonſtrata ſunt.*

Digitized by Google

Quod ſi parabola AC tertia, ſupra deſcripta in prima epiſtola fuerit, quarta hyperbola orietur, & ita deinceps idem quoquè dicendum de oppoſitarum deſcriptione: quarè in his amplius non immorabor.

Hoc autem ſilentio præterire nolo, cognita harum curvarum geneſi, præcipuaque proprietate reliquas quidem proprietates facillimè erui poſſe; ut ab aliis in conicis ſectionibus factum eſt, idque demonſtrare nunc Tibi poſſem; ſed vereor, ne in magnum volumen abeat epiſtola, plurima enim eſſent, quæ demonſtranda mihi forent: hoc autem, tanquam ſpecimen adducam, ut magis eorum, quæ dixi veritas conſtet, utque alios ad harum contemplationem alliciam, rectas omnes per centrum quarumlibet harum curvarum tranſeuntes, atque utrinque in hyperbolis terminatas bifariam in eodem centro dividi.

Item duobus punctis in qualibet harum hyperbolarum ſumtis, ut D, *d*. fig. 3. ductiſque rectis ab his DE, *de* parallelis aſymptoto AL, ita eſſe quadratum AE ad quad: *Ae*, ut recta *ed* ad rectam DE.

Patet inſuper fig. 5. ſumtis duobus punctis C, B in ſecunda hyperbola CPD, cùjus aſymptoti ſint AG, AH, atque ex his ductis binis rectis ſibi invicē parallelis GCPH, EBDF occurrentibus hyperbolæ in punctis P, D, ſolidum, quod continetur ſub recta CG in quad: CH æquari ſolido ſub recta EB in quad: BF. Intellige autem talem eſſe hanc ſecundam hyperbolam, ut omnia ſolida, quæ ſub quadrato cujuſcumque AS in SP continentur æquentur potentiæ hyperbolæ. Quod ſi hyperbola PC illa fuerit, quam ſupra tertiam, ſivè Quadratoquadraticam diximus, æquale erit planoplanum, quod continetur ſub recta CG in cubum CH planoplano ſub EB in cubum BF; idem in altioribus dicendum, modò quæ in Tertia de planoplanis, in Quarta de planoſolidis, in Quinta de ſolidoſolidis intelligantur, &c.

Manifeſtum inſuper eſt, in eadem ſecunda hyperbola PC, ſi ducatur recta HPCG ſolidum quod continetur ſub quadrato

drato CH in CG æquari ſolido, ſub quadrato HP in PG: quod ſi data hyperbola Tertia fuerit, planoplanum quod cõtinetur ſub recta GC in cubum CH æquabitur planoplano ſub cubo HP in PG; idem in altioribus accidit.

E quibus, niſallor, deducitur, in ſecunda hyperbola PC ductam rectam *KLM*, quæ hyperbolam in puncto L contingat, atque utrinque in aſymptotis terminetur, ita in puncto contactus L dividi, ut L*K* dimidium ſit reliquæ LM, ſivè tertia pars totius KM: ſi vero hyperbola PC tertia fuerit, recta *K*M, ita in puncto contactus L dividetur, ut *K*L ſit quarta pars totius KM; ſi verò PC ſit quarta, KL erit quinta pars totius KM, & ita deinceps.

Quod ſi in ſecunda hyperbola PC ducta recta KM utrinque in aſymptotis terminata, ita ab hyperbola in puncto L dividatur, ut KL ſit tertia pars totius *K*M; hæc recta hyperbolam in puncto L continget; idemque locum etiam habet in altioribus curvis.

Quæ autem de unica hyperbola uſque adhuc dicta ſunt eadem etiam in oppoſitis hyperbolis intelligenda, quemadmodum manifeſtè colligi poteſt.

Cæteræ autem harum curvarum proprietates eadem ratione erui poſſunt: quin & hoc maximum laboris compendium eſt, quòd detectis proprietatibus tertiæ hyperbolæ, aut etiam Parabolæ, eædem rectà ad cæterarum curvarum detegendas nos ducant. Quarè non parva rebus Geometricis fiet acceſſio, ſi quis omni ſtudio in hoc incumbat, ut doctrinam ſectionum conicarum ulterius ad has etiam curvas promoveat. In hoc verò ſumma animi contentione, Vir Ampliſſime, ſedulam operam navabo, modò mihi vires, animumque addideris: id verò præſtare potes, ſi facies, ut hæc ingrata Tibi non fuiſſe intelligam.

Sed jam aliqua de locorum compoſitione, quemadmodũ, in prima epiſtola pollicitus ſum, afferam; ut hinc pateat ex harum curvarum deſcriptione omnia ea loca compoſita fuiſſe, quorum æquationes duobus tantum terminis exprimun-

muntur, vel quæ ad eaſdem reduci poſſunt: id autem ſi fecero, Carteſii voluntati morem geſſero, qui poſtquam ſecundo ſuæ Geometriæ libro ſummam operam adhibuit in iis componendis, quæ planorum, ſolidorumque nomine veniunt, ex quo non paruã ſibi gloriam comparavit, ſui temporis Geometras hortatur ad altiorum locorum compoſitionem perficiendam(*a*). Et quoniam epiſtola prima omnia ea loca compoſui, quæ ſunt ad parabolas, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum &c. æquantur ſolido ſub parametro in quadratum intercæptæ; vel planoplano ſub parametro in cubum intercæptæ &c. in tertia verò epiſtola de iis differere ſtatui, quæ ad parabolas ſunt alterius generis, in quibus videlicet cubi, vel quadratoquadrata applicatarum &c. æquantur ſolido ſub quad: parametri in intercæptam, vel planoplano ex cubo parametr in intercæptam &c. ideò hic eorum compoſitionem aggrediar, quæ ad hyperbolas ſunt, quorumque æquationes conſtitutivæ duobus terminis deſignantur, quorum unum binæ ignotæ, quomodolibet in ſe ductæ conſtituunt, reliquum verò data omnino quantitas.

Primus itaque locus, qui ſe nobis componendus præbet per hanc æquationem deſignatur $xxy \infty a^3$ (quantitates verò x, & y, indeterminatas intelligo; a, verò & quæ per ſimiles literas deſignãtur, datas)& patet eſſe ad hyperbolam, quam ſupra ſecundam diximus. Componetur autem ſic.

In figura tertia, ponamus A eſſe initium quantitatis indeterminatæ x; atque eadem quantitas x per rectam AB poſitione datam ſeſe extendere intelligatur; quantitas autem y, ſupra hanc in dato angulo; puta AED, exurgere concipiatur. Ducta ex puncto A recta AL parallela ipſi *ED*: aſymptotis AL, AB, potentia verò a^3; ſecunda hyperbola deſcribatur OD; dico hanc curvam eſſe locum quæſitum. Sumto quippè in hac quolibet puncto, ut *D*, ductaque ED paral-

(a) *Epiſt.47.lib.3.*

parallela aſymptoto AK, erit AE x, at ED y. Et quoniam ex proprietate huius hyperbolæ ſolidum ſub quadrato AE in ED, hoc eſt xxy æquatur hyperbolæ potentiæ, quæ eſt a^3. ideò habebitur huiuſmodi æquatio $xxy \infty a^3$; & patet propoſitum. Quod ſi habeatur æquatio $yyx \infty a^3$; facillimè etiam idem locus per hanc deſignatus ex iis, quæ ſupra tradita ſunt, componetur.

Si verò æquatio, quæ locum deſignat, huiuſmodi fuerit, $x^3y \infty a^4$. Expeditè etiam conſtrui poterit adhibita curva hyperbolica, quam ſupra tertiam hyperbolam vocavi:(fig. 3.) ſi enim initium quantitatis x ponamus eſſe punctum A ita, ut eadem quantitas x per rectam AE ſe extendere intelligatur; at y, ſuprà hanc in dato angulo, puta AED, exurgat; centro A, aſymptotis AE, AL tertia hyperbola DO methodo tradita deſcribenda eſt ita, ut planoplanũ ſub cubo AE in DE æquetur dato planoplano a^4; hæc enim erit locus quæſitus: ſumto namquè in hac curva quolibet puncto, ut D, ductaque DE, quia AE eſt x, ED verò y, atque ex proprietate huius hyperb. planoplanum ſub cubo AE in ED æquatur dato planoplano a^4. ideò habebitur huiuſmodi æquatio $x^3y \infty a^4$. *Q. E. D.* Nec abſimili ratione componetur locus per hanc æquationem expreſſus $x^3y \infty a^4$.

Si verò æquatio loci conſtitutiva ad quintam dimenſionem aſſurgat, atquè his terminis notetur, $x^4y \infty a^5$. facillimè etiam hæc conſtrui poterit; omnibus enim, ut ſupra, poſitis, ita ut punctum A ſit initium quantitatis x, &c. centro A, aſymptotis AL, AE hyperbolam quartam deſcribere opus eſt, quæ locus erit quæſitus. Demonſtratio autem, velut in aliis factum eſt, procedit. Idem ferè dicẽdum ſi æquatio fuerit $y^4x \infty a^5$;

Sed ſub hoc genere hyperbolarum alia etiam cõſideranda venit, cuius quidem ope locus per hanc æquationem $x^3yy \infty a^5$ deſignatus componi poteſt. Deſcribitur autem ſic. In eadem fig. 3. circa aſymptotos AE, AK ſecunda hyp. deſcribatur CO, in qua ſolidum, quod continetur ſub quadra-

to CE, in AE æquetur dato ſolido a^3. Directrice autem hac curva; *Deſcribente* verò CED, Polo *A*, Intervallo EB, quod æquetur datæ quantitati *a*, Efficiente autem *BD*; curva deſcribatur DO, dico hanc eſſe curvam quæſitam, cuius beneficio componetur locus per hanc æquationem deſignatus $x^3yy \infty a^5$. Si enim, ut ſuprà, *AE* dicemus *x*. ED vero *y*. Quoniam ſimilia ſunt triangula BED, AEC erit, BE ad E*D*, quemadmodum AE, ad EC, ergo EC erit xy, diu. per *a*. Quoniam autem ſolidum ſub quadrato EC in AE, hoc eſt x^3yy, diu: per aa. Æquatur dato ſolido a^3. Ideò habebitur huiuſmodi æquatio x^3yy. diu: per $aa \infty a^3$, vel facta congrua multiplicatione $x^3yy \infty a^5$. *Et* patet, quod erat oſtendendum.

Loca autem, quorum æquationes ad ſextam dimenſionem aſſurgunt adeò faciliter componi poſſunt, ut explicatione penitus non egeant; quinta ſiquidem hyperbola tradita methodo deſcripta, propoſitum præſtabit.

Sub ſeptimo autem gradu plures loci componendi veniunt, atquè adeò plurium etiam hyperbolarum opus habemus. Sed huius loci $x^6y \infty a^7$. compoſitio ab iis, quæ ſupra dicta ſunt, pendet, quemadmodum etiam ſi habeamus $y^6x \infty a^7$. quarè in his amplius non immorabor. Curva autem, quæ ad hunc locum componendum $x^5yy \infty a^7$. deſervit, hac ratione in plano deſignatur. In eadem figura tertia centro A, aſymptotis AE, AK hyperbola deſcribatur CO; in qua planoſolidum ſub quadrato CE in cubū AE æquetur dato planoſolido a_5. *Di*rectrice deindè hac curva, Deſcribente verò CED, Polo A, Intervallo EB, ſive *a*, Efficiente BD curva deſcribatur DO. Dico hanc eſſe curvam quæſitam. Sumatur enim in ipſa quodlibet punctum, ut D. ſimilia item erunt triangula AEC, DEB (*a*). Gomque AE ſit *x*. ED *y*, at Intervallum EB *a*. erit EC xy. diu. per *a*. planoſolidum verò ſub quadrato EC in cubum AE, erit x^5yy diu. per aa. quod quidem cum æquari debeat dato planoſolido, a^5ha-

(a) *Ex hip.* 29. *pr.* & 4. *ſex.*

a^5, habebitur hujuſmodi æquatio x^5yy. diu:per $aa\propto a^5$, & facta multiplicatione per aa. habebitur æquatio $x^5yy\propto a^7$, quod erat demonſtrandum. Similiter ſub hoc eodem genere curva cadit, cujus æquatio conſtitutiva per hos terminos exprimitur $x^4y^3\propto a^7$; quæ etiam hoc modo in plano deſcribi poteſt. Centro A, aſymptotis iiſdem rectis AK, AE curva hyperbolica deſcribatur CO, hujus quidem proprietatis, ut planoplanum ſub cubo EC in rectam AE æquetur dato planoplano a^4. Tum hac eadem Directrice, Deſcribente verò, reliquiſque, ut ſupra, hyperbola deſcribatur DO, hæcque erit quæſita, eodem quippè modo demonſtrabitur EC fore xy. diu.per a. planoplanum verò ſub cubo EC ſive x^3y^3 diut per a^3, in *AB* ſive, x. hoc eſt x^4y^3. diu.per a^3. æquatur dato planoplano a^4; ergò habebitur hujuſmodi æquatio x^4y^3. diu. per $a^3\propto a^4$, & facta congrua multiplicatione per a^3, erit $x^4y^3\propto a^7$, & patet quomodò, & hic alius locus componendus ſit.

Atquè ex his omnibus manifeſtè apparet allatam methodum talem eſſe, qua ſimpliciorem inveniri poſſe non puto, dum tanta elegantia, atque facilitate omnes hæ curvæ, & & miro quidem ordine deſcribi poſſunt; quarè iterum affirmare audeo, ſolidorum contemplationem huic noſtræ methodo omnino poſthabendam: adduci quippè non poſſum, ut credam, fieri poſſe, ut ex aliqua ſectione hæ eædem curvæ tam faciliter, atque eleganter deſcribi poſſint.

Eadem ratione operandum eſt ad omnia ea loca componenda, quorum æquationes quibuſque dimenſionibus deſignantur. Quæ quidem omnia quantum Carteſianam Geometriam non modò illuſtrent, ſed etiam promoveant, Tibi judicãdum relinquo. At verò non ſolum allata methodo curvæ deſcribi poſſunt, quarum ope ea loca componuntur, quorum æquationes poſtquam ad ſimpliciſſimas reductæ ſunt, duobus tantum terminis exprimuntur; ſed & alias inſuper curvas in plano deſignare poſſumus, quarum beneficio omnia alia loca componere, pulcherrimaque inſuper proble-

mata enodare poterimus. Si enim, in figura quarta, curva AC, non parabola, ſed prima hyperbola æquilatera eſſe ponatur, cujus tranſverſa diameter AN, centrum verò G, vertex A, ita ut applicatæ ad diametrum AE ſint rectæ omnes parallelæ ipſi AL, velut recta CE: hac autem curva, ceu Directrice utamur, in qua applicata CE Deſcribens incedat; Polus autem ſit vertex A, Intervallum autem ED data quælibet; Efficiens verò recta BD parallela ſemper rectæ AG; curva DO, quæ ex interſectione Efficientis BD, Deſcribētiſque CD deſcribitur hyperbola erit, quæ ſub eodem genere, ac ſecunda comprehendetur, cujus quidem aſymptoti erunt AB, AL; cujuſque hæc erit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, velut D, ductaque DE parallela aſymptoto *AL*, ſolidum, quod continetur ſub quadrato applicatæ *ED* in intercæptam AE æquetur ſolido, quod continetur ſub quadrato Intervalli *BE* in rectam NEdiametrum videlicet tranſverſam, una cum intercæpta *AE*. Quare hujus curvæ ope, & hic locus componi poterit $xyy \propto abb + bbx$. Si ponamus tranſverſam diametrum AN eſſe, *a*. Intervallum autem *b*. indeterminata verò *A*E *x*. reliqua autem indeterminata *ED y*. ſed & alterum exemplum adducere inutile nō erit ad locum explicandum, qui ab omnibus in ſecundo Geometriæ Carteſii libro difficillimus cenſetur.

In figura ſexta circa aſymptotos BC, BS prima hyperbola deſcribatur GO, cujus potentia æquetur duplo quadrato a recta DC. Tum producta aſymptoto *B*C uſque ad A ita, ut *AB* æquetur rectæ datæ DC; Polo A, Directrice hyperbola GO, Deſcribente verò recta G*D*F parallela aſymptoto BS; Intervallo autem recta DC, atque Efficiente CF parallela rectæ AG, curva deſcribatur FO. Dico hanc hyperbolam eſſe, quæ ſecūdi etiam generis erit, cujus quidem aſymptoti erunt BC, *B*X, centrum verò B, cujuſque hæc erit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut F, ductaque F*D* parallela aſymptoto *B*X, ſolidum ſub quadrato BD in rectam *D*F, una cum ſolido ſub tribus *A*B, B*D*, *D*F, æquetur duplo cubo *A*B,

vel

vel ſolido ſub potentia hyperbolæ in datum Intervallum. Quoniam enim ob ſimilitudinem triangulorum CDF, *A*DC, ita eſt CD ad *D*F, ut *A*D ad DG (*a*) erit rectangulum GDG æquale renctangulo ADF (*b*); quòd ſi omnia hæc rectangula ducantur in BD, erit ſolidum ſub tribus AD, BD, DF; vel ſolidum ſub quadrato BD in DF, una cum ſolido ſub tribus AB, BD, DF(*c*) æquale ſolido ſub tribus DC, DG, DB; (*d*) vel ſolido ſub potentia hyperbolæ Directricis in Intervallũ, vel duplo cubo à recta *AB* (*e*). Q. E. D.

Atque hæc etiam methodus in infinitum extendi poteſt. Si enim pro Directrice GO non prima, ſed ſecunda hyperbola conſtituatur, ut ſolidum ſub quadrato BD in DG æquetur dato ſolido, curva FO eadem ratione deſcripta talis erit naturæ, ut planoplanum ſub cubo BD in DF, una cum plano-plano ſub quadrato BD in datam *A*B in DF, æquetur dato planoplano, quod producitur ex multiplicatione potentiæ hyperbolæ in Intervallum, idemque in altioribus dicendum, modò idoneæ poteſtates aſſumantur.

*A*t ad ſecundi generis hyperbolam FO modò deſcriptam rediens dico, ſi in aſymptoto BX aſſumatur recta BE æqualis datæ rectæ AB, atque ex puncto E ducatur recta HN parallela aſymptoto BC, occurrens deſcriptæ hyperbolæ FO, in O, manifeſtum eſſe, ſolidum, quod continetur ſub quadrato *B*D in DF æquari ſolido ſub quadrato BD in DH, necnon ſolido ſub eodem quadrato BD in HF (*f*); quarè cùm ex modo demonſtratis ſolidum ſub quadrato BD in DF una cum ſolido ſub tribus *AB*, BD, DF æquetur duplo cubo ex AB? erit etiam ſolidum ſub quadrato BD in DH una cum ſolido ſub eodem quadrato B*D* in HF, & ſolidum ſub quadrato AB in BD una cum ſolido ſub tribus AB, BD, HF(*f*) æquale duplo cubo ex A*B*. Quoniam verò ſi ab æqualibus æqualia aufe-

ran-

(a) Ex *hyp.* 29.*pr.* & 4.*ſex.* (b) 16.*ſex.* (c) *pr. ſecund.* (d) *ex iis, quæ in pr.epiſt.demõſtrata ſunt.* (e) *ex hyp.* (f) *Pr.ſex.*

rãtur, quæ remanent, ſunt æqualia; ideò ſi tam à ſolidis, quæ ſupra, quã à duplo cubo rectæ AB, auferatur ſolidũ ſub quadrato BD in *D*H una cũ ſolido ſub quadrato AB in *B*D, erit reſiduũ, nēpe ſolidũ ſub quadrato BD in HF, una cum ſolido ſub tribus AB, *B*D, HF æquale duplo cubo ſub AB—ſolido ſub quadrato *A*B in BD—ſolido ſub quadrato *BD* in DH. Sed ſolidum ſub quadrato *BD* in HF, una cum ſolido ſub tribus AB, BD, HF producitur multiplicatione rectarũ FH, BD, ſivè FX, intellige FX parallelæ A*B*, & rectæ *AD*, ſive FR. At duplus cubus ab AB, minus ſolido ſub quadrato *A*B in BD, minus ſolido ſub quadrato BD in DH producitur à tribus eiſdẽ rectis, data videlicet HD, ſive AB, & recta ID, ſi ponamus I*A* æqualem A*B*, nec nõ recta MD, ſi ponamus BM æqualem AB, ſivè à tribus rectis data DH, FP, FZ, modo IP, MZ, AR parallelas rectæ BX ponamus eſſe; ergo ſolidum quod à tribus FH, FX, FR æquatur ſolido, quod fit à tribus data videlicet recta EB, FP, FZ. His præmiſſis facile eſt problema enodare, quod Carteſius ſecundo ſuæ Geom: libro inſolutum reliquit; id verò hujuſmodi eſt.

In figura ſexta datis quatuor rectis lineis parallelis inter ſe PI, RA, X*B*, ZM, ita ut diſtantia inter has ſit data, atque eadem; quinta autem KN eaſdem datas ad quoslibet angulos ſecante, puta rectos; oportet invenire punctum, ut F, à quo ductis rectis perpendicularibus ad poſitione datas, ut FH, FR, F*P*, FZ, FX; ſolidum ſub tribus FH, FX, FR æquetur ſolido ſub reliquis duabus FP, FZ in quamlibet datam, puta EB, vel *AB*: & quia punctum F inveniendum unicum non eſt; ideò determinanda inſuper proponitur linea, in qua hæc puncta reperiuntur.

Soluit hoc problema Carteſius, cum ſolidum ex tribus ductis ad tres parallelas æquatur ſolido, quod continetur ſub reliquis duabus, quarum una cadit ſuper quintam, & data quapiam linea; demonſtravitque punctum quæſitum cadere in curva, quam ille motu parabolæ deſcripſit, quæque allata

etiam

etiam methodo, & forſan facilius, deſcribi poteſt. Verùm quando ſolidum continetur ſub duabus ductis ad parallelas, & tertia, quæ cadit ſupra quintam, ut ſupra dictum eſt; aliter ſe res habet, quod & novit Carteſius; at curvam ſolutioni inſervientem non tradidit; niſi tam obſcurè, & breviter, ut manifeſtè appareat, nō omninò illi perſpectam fuiſſe. Quotquot autem ipſius Geometriam explanare ſuſceperũt, ne ullum quidem hac de re verbum fecerunt, in cæteris alioquin, quæ obſcuritate non laborant, nimis multi. Quarè hunc locum inter cæteros explicandum ſuſcepi; cùm enim difficillimus ſit, non ingratum me facturum Matheſeos amatoribus confido.

Sed hæc ſolutio ab iis, quæ dicta ſunt erui poteſt, cum enim demonſtratum ſit (vide fig. 6.) ſolidum, quod continetur, ſub duabus FX, FR, quæ cadunt ſuper duas ex parallelis, & tertia FH, quæ cadit ſupra quintam poſitione datam, æquari ſolido, quod continetur ſub duabus FP, FZ, quæ ducuntur ad reliquas duas ex parallelis in datam, quæ ſit BE, patet punctum F eſſe unum ex quæſitis; curvam verò PO modò deſcriptam fore illam, in qua omnia puncta quæſita reperiuntur. Quod ſi diſtantia inter parallelas non ſit eadem, quemadmodum modo aſſumta eſt, idem etiam accidit; ſicut idem omnino accidit in Carteſii exemplo. Ab hujus verò demonſtratione me nunc abſtineo, non enim omnia dicere ſuſcepi, cùm præcipuè non defuturi ſint, quibus idem hic locus explanandus contingat; à quibus majori elegantia, & doctrina illuſtrabitur.

Placuit autem, Vir Ampliſſime, demonſtrationem hac de re afferre veterum Geometrarum more, ſepoſitis algebricis notis, non ſolum, ut iis etiam, qui Algebræ, quam Specioſam vocant, præcepta non callent, ſatisfacerem, ſed ut hoc etiam palam fieret, methodum videlicet Syntheticam ab ipſa Analyſi pendere, nec fieri poſſe, ut ad illam perveniatur, niſi hæc, velut Dux, aditum ad eandem patefaciat, & muniat: quarè & Analyſim Algebricam ab injuria, quam ei non-

nul-

nulli ex pſeudogeometris nimis perfricati oris inferre conan-tur, vindicavi, dicentes ipſam in hoc deficere, quod imagi-nationi non ſerviat, undè putant non peius in Matheſi pec-cari poſſe, quam ſi Geometrica problemata, quæ figuris explicari, atque oculis ſubiici poſſunt, methodo Algebricæ addicantur, & ſub hoc quaſi velamine in publicū prodeant. Omnes quippè demonſtrationes, quæ hoc tractatu conti-nētur, quæ quidem, & plurimæ, eæque non inelegantes ſunt, atque à nullo adhuc excogitatæ, invenire mihi licuit Analy-ſis veſtigiis inſiſtenti, idque tantillo temporis intervallo, quemadmodum ſpectatæ fidei Viri teſtari poſſunt. An verò id etiam præſtare valuiſſet ſyntheticus Geometra videant, qui hæc maturè legerint, atque perpenderint.

Quod ſi Tibi, Vir humaniſſime, cui utraque methodus, ſeù potiùs quicquid ſcientiarum eſt patet, magis volupe erit, notis Algebricis uti; en quomodò faciliimè ea omnia de-monſtro, quæ modò de hoc problemate attuli.

Sint datæ quatuor rectæ poſitione parallelæ inter ſe, ut ſupra, quarum diſtantia ſit recta, quam vocabo *d.* & quin-ta eaſdem ad angulos rectos ſecans, ut in figura ſexta expla-natum eſt. Data autem recta ſit etiam, *d.* Centro deindè B aſymptotis BE, BC hyperbola deſcribatur FO; cujus hæc ſit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut F, ductaque FD, parallela aſymptoto BE ſolidum, quod continetur ſub quadrato BD in applicatam DF, una cum ſolido ſub duabus BD, DF & tertia data *d*, æquetur duplo cubo ex *d.* Quomo-do verò hujuſmodi curva deſcribi poſſit, ſupra demonſtra-tum eſt. Dico hanc eſſe, &c. Conſtructa enim figura, ut fa-ctum apparet, ſi BD, ſivè EH, dicamus x; HF verò y. ER erit $x \ast d$; ſolidum verò ſub his tribus erit $yxx \ast ydx$. Similiter FP erit $x \ast 2d$. FZ autem $d + x$. Solidum verò ſub his, & tertia data *d*, eſt $2d^3 - ddx - dxx$. undè habebitur hujuſmo-di æquatio $xxy \ast dxy \infty 2d^3 + ddx - dxx$. Sed & eadē æqua-tio producitur ex ipſa curvæ proprietate; etenim DF eſt $d \ast y$; ergò ſolidum ſub quadrato BD in DF, una cum ſolido

ſub

ſub tribus BD, DF, & d erit $dxx + yxx + ddx + dxy$, quod cum æquari debeat duplo cubo ex d. exurget hujuſmodi æquatio $dxx + yxx + ddx + dyx \infty 2d^3$; vel facta congrua trãſpoſitione $xxy + dxy \infty 2d^3 - ddx - dxx$; e quibus manifeſta ſunt ea omnia, quæ demonſtranda erant. Sed nec amplius immorabor in aliis caſibus explanandis; multa enim dicenda reſtant ad ea illuſtranda, quæ de ſuperſolidorum problematum æquationibus conſtruendis tradidit Carteſius tertio ſuæ Geometriæ libro.

Quòd autem difficillima hæc etiam ſint, indicat eorum ſilentium, qui commentaria in ejuſdem Geometriam edidere. Qui autem aliqua de his attulere, in hoc maximè laborarunt, quòd his curvis uſi ſunt, nec tamen demonſtrarunt, quomodò eædem in plano deſcribi poſſent. Nunc autem, quòd via ad has curvas deſcribendas patuit, dicere auſim, parum, aut nihil diſtare inter quadratæ æquationis conſtructionem, & ejus, quæ ad ſexcenteſimam dimenſionem uſquè aſſurgat.

Carteſius tertio ſuæ Geometriæ libro regulã tradidit, qua æquationes omnes, in quibus unica ignota quantitas reperitur, quæque ad quintam, vel ſextã dimenſionẽ aſſurgunt, cõſtrui poſſint. Quamvis autem hujuſmodi regula mirum, portentoſumque *Authoris* ingenium prodat, certum tamen eſt, vel ipſo *Authore* fatente, maximis eam difficultatibus laborare, atquè à ſimpliciſſima, quod maximè in Mathematicis cavendum eſt, via deflectere. Si enim conſtruenda proponatur æquatio per hos terminos expreſſa $x^6 \infty ax^5 - b^6$. Quis non videt, maximoperè laborare Carteſii regulam, quæ jubet prius reducendam eſſe ad formulam, in qua omnes termini adſint, omneſque radices veræ ſint, & quantitas cognita tertii termini excedat quadratũ à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, eaque deinde peragenda, quæ ferreum hominem defatigarent, cum ipſius conſtructio facillima obtineri poſſit? nil aliud quippè eſt faciendũ, fig. 73 quã circulũ ADC deſcribere, cuius diameter æqualis

quantitati notæ, quam in æquatione per a, deſignavi. Tum ex puncto A ducta AS perpendiculari ad diametrum AC, opus eſt cẽtro A, aſymptotis AC,AS ſecũdam hyperbolã deſcribere *DO*, ita ut ex quolibet ejus puncto, ut *D*, ducta perpendiculari *DB* ad aſymptotum AC, ſolidum, quod continetur ſub quadrato A*B* in B*D* æquetur b^3. Si enim hæc hyperbola datum circulum in aliquo puncto, ut D ſecet, atquè ex hoc demittatur *DS* parallela diametro circuli AC, hæc erit propoſitæ æquationis radix x.

Quarè ejus erit, qui Carteſianam Geometriam explanare debet, huic difficultati occurrere, cum præcipuè ipſe Carteſius id expoſtulet; ait enim circa finem Tertii. *Verùm notandum eſt in plurimis horum exemplorum, quòd circulus hic tam obliquè hanc parabolam ſecundi generis ſecare poſſit, ut interſectionis punctum cognitu ſit difficile; atquè adeo hæc conſtructio ad praxim non ſit idonea. Cui quidem rei facile remedium afferri poteſt, componendo alias regulas ad imitationem hujus, &c.* Nullus autem, quem ſciam, quænam ſint hæ regulæ demonſtravit, nec forſan ipſe Carteſius novit; curvis enim, quas modò deſcripſi, ignotis, nulla methodus ad has æquationes conſtruendas, ſaltem, quæ ſimpliciſſima ſit, inveniri poteſt. Nec ego hìc oſtendam, quomodò unica regula æquationes omnes, quæ ſub quinta, vel ſexta dimenſione comprehenduntur, conſtruere poſſibile ſit: quamvis enim facillimum id mihi eſſet, ſatius tamen duco demonſtrare, quamlibet æquationem datam, cujuſcumque ea dimenſionis fuerit, facillìmè conſtrui poſſe aliqua ex his adhibita; ut facilior evadat operatio, atquè adeò molæſtiæ omnes evitentur, quæ ex laborioſiſſimis calculis oriri ſolent, qui æneum quemque laſſare valent. Ea item demonſtrabo, quæ ignoravit Carteſius, dum putavit ad conſtructionem æquationis, v.g. quæ ad nonam dimenſionem aſſurgit, opus eſſe curvam adhibere, quæ quarti generis eſſet, vel cujus æquatio conſtitutiva ad ſeptimam, vel octavam dimenſionem aſ-

ſurgeret (*a*), & tamen illa conſtrui poteſt ope curvæ ſecundi generis, quæ ad tertium gradum aſſurgit.

Sed jam proponatur conſtruenda æquatio ſex dimenſionum his terminis expreſſa $x^6 - qx^5 - ppx^4 - rxx \ast n^6 \propto 0$. Contro A, in fig. 8. aſymptotis AC, AL ſibi invicem ad angulos rectos in puncto A iunctis, ſecunda hyperbola deſcribatur DN, cujus potentia ſit n^3, hujus autem hæc ſit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut *D*, ductaque *D*E parallela asymptoto AL, ſolidum ſub quadrato *A*E in E*D* æquetur potentiæ n^3. Sumta deindè in AC aſymptoto recta AC æquali dimidio quantitatis q, ex puncto C erigatur perpendicularis C*B* æqualis quantitati r^4 diu. per $2n^3$: juncta deindè AB, ex puncto A erigatur perpendicularis AF æqualis p, & jungatur BF. Centro deindè B, intervallo BF circulus deſcribatur, qui quidem deſcriptam hyperbolam in aliquo puncto ſecare poteſt. Secet itaque in *D*, atquè ex puncto *D* ducatur DL parallela AE. & ipſi AL occurrens in L. Dico DL radicem eſſe propoſitæ æquationis. Ex puncto enim D, ducatur perpendicularis *D*E parallela aſymptoto AL, atq; AE, ſivè DL dicamus x. Ex proprietate itaquè hyp. DN, DE erit n^3 diu. per xx. *D*G verò erit n^3 diu. per $xx, - r^4$ diu. per $2n^3$. hujus autẽ quãtitatis quadratum eſt n^6 diu. per $x^4, - r^4$ diu. per $xx, \ast r^8$ diu. per $4n^6$. Quia verò AC eſt dimidium quantitatis q, AE autem x, CE, vel GB erit dimidium quantitatis $q - x$, & huius quadratum erit quarta pars quadrati ex $q - qx \ast xx$. Cum autem quadratum GB, una cum quadrato DG æquetur quadrato *B*D (*b*), ſivè *B*F, omnes enim ſunt circuli DF radii; ideò habebitur hujuſmodi æquatio n^6 diu. per $x^4, - r^4$ diu per $xx, \ast r^8$ diu. per $4n^6 \ast qq$ diu. per $4, - qx \ast xx \propto qq$ diu. per $4 \ast r^8$ diu. per $4n_6 \ast pp$: quadratũ quippè FB æquatur quadratis AF, AB, ablatiſque iis, quæ ſe invicem tollunt, factaque congrua multiplicatio-

H 2 ne,

(a) *Ex iis, quæ habentur in fine libri pr. & initio ſec.*

(b) *47. pr.*

ne, atquè tranſpoſitione exurget hujuſmodi æquatio $x^6 - qx^5 - ppx^4 - r^4xx * n^6 \infty 0$. Et patet, quod erat demonſtrandum.

Quod ſi centro A, aſymptotis AM, AL hyperbola ſecunda deſcribatur QK, ita ut ſolidum, quod ſub quadrato AR in rectam QR continetur æquetur n^3; atquè hæc circulum in aliquo puncto ut Q ſecet, ab eoque ad aſymptotum AM ducatur RQ parallela aſymptoto AL, recta AR erit propoſitæ æquationis falſa radix, quod facillimè cognoſci poteſt.

Atquè ex hujus æquationis conſtructione manifeſtè colligi poteſt, reliquas omnes quibuſcũq; ſignis, terminiſque affectas conſtrui poſſe, eaſque etiam, quæ ad quamlibet dimenſionem aſſurgunt. Vt enim aliquod exemplum afferam, ſi in figura 7. pro circulo ADC ponamus curvam, quæ ex genere ellipſium eſt, cujuſque hæc eſt proprietas, ut ſumto quolibet puncto, ut A, ductaque AE parallela aſymptoto AS ſolidum, quod continetur ſub quadrato AB in BC æquetur cubo applicatæ BA: hyperbola autem AO hanc curvam in aliquo puncto, ut A, ſecet, ducta DB parallela aſymptoto AS, intercæpta *AB* erit radix æquationis, quæ ad nonam dimenſionem aſſurgit. Potentia enim ſecundæ hyperbolæ AO ſtatuatur b^3 AC autem ſit a, AB verò indeterminata ſit x, BD ex proprietate hujus hyperbolæ erit b^3 diu. per xx, & hujus cubus b^9 diu. per x^6, & quoniã AB eſt x & AC a, erit BC, $a - x$, & ſolidum ſub quadrato AB in BC erit $axx - x^3$, quod cum æquari debeat cubo *BA*, habebitur hujuſmodi æquatio b^9 diu. per $x^6 \infty axx - x^3$, & facta multiplicatione per x^6, exurget æquatio novem dimenſionum, quæ per hos terminos exprimetur $x^9 - ax^8 * b^9 \infty 0$. Similiter ſi opus ſit ſex medias continuè proportionales inter duas datas invenire, quarum prima ſit a; ultima verò b: poſita prima ex inveniendis x habebitur hujuſmodi æquatio $x^7 \infty ba^6$, quam quidem ſatis expeditè hoc modo conſtruere poſſumus.

In fig. nona ſint duæ rectæ AB, AD ſe ſe ad quoslibet angulos, puta rectos, in puncto A interſecantes. Vertice autem

Digitized by Google

A, axe verò AD, parametro autem prima ex datis, hoc eſt a parabola ſecũda deſcribatur AOC, ita ut cubus cujuſcumque applicatæ CD æquetur ſolido ſub parametri a quadrato in intercæptam AD (*a*). Similiter vertice A, axe verò AB parametro autem ultima ex datis b, ſecunda item parabola deſcribatur, qualem in prima epiſtola tradidi, in qua videlicet ordinatæ cubus æquatur ſolido ſub quadrato intercæptæ in parametrum: hæ enim parabolæ ſe ſe in aliquo puncto ſecabunt; ſecent itaquè in C, atquè ex hoc demittatur CD applicata ad axem AD; dico hanc eſſe primam ex quæſitis. Ducta enim CB ad angulos rectos, hoc eſt, ordinata ad axem AB, ſi CD, vel AB vocetur z, CB ex proprietate parabolæ AOC erit z_3 diu. per aa. Quoniam autem cubus CB, ſivè z^9 diu. per a^6, æquatur ſolido ſub quadrato AB in parametrum, hoc eſt, bzz. Ideò habebitur hujuſmodi æquatio z_9 diu. per $a^6 \infty bzz$; vel facta convenienti multiplicatione, atquè diviſione, exurget æquatio $z^7 \infty ba^9$. Q. E. D.

Ex hoc autem, & ſuperiori exemplo ſatis patet non benè à Carteſio inſtitutam eſſe problematum in certas claſſes diviſionem: ut ſupra etiam dictum eſt.

At verò prætereundum hoc loco non eſt, rationem inveniendi medias proportionales ope harum parabolarum pulcherrimam quidem eſſe, dum facillimè eadem uti poſſumus ad quaslibet inveniendas, variatis ſecundum opus fuerit, curvis. Si enim ambæ hæ parabolæ primæ fuerint, CD erit prima ex inveniendis, quando inter duas datas duæ mediæ proportionales inveniendæ ſunt. Quòd ſi curva AOC ſecunda parabola fuerit, qualem in tertia epiſtola deſcribo; at curva parabolica ASC ſit prima parabola; DC erit prima ex quæſitis, quando inter duas datas inveniendæ ſunt quatuor mediæ continuè proportionales. Si verò parabola ASC ſit ſecũda parabola in prima epiſtola deſcripta, CD erit prima ex inveniendis; quandò inter duas datas reperiri debent ſex me-

diæ

(a) *Vide Epiſt. tertiam.*

diæ continuè proportionales. Tandem ſi parabola AOC ſit ea, quam in tertia epiſtola tertiam voco; At parabola ASC ſit ſecunda ejuſdem tertiæ epiſtolæ, in qua cubus applicatæ æquetur ſolido ſub rectangulo ex datis in intercæptam, DC erit prima ex quæſitis;ſi inter duas datas inveniendæ ſint decem mediæ continuè proportionales; idem, ſi plures inveniendæ proponantur. Similiter demonſtrabo; id etiam accidere,ſi parabola,& hyperbola ad mediarum quarumlibet inventionem adhibeantur.

Ab his autem,quæ modò attuli,non parva oriri poteſt utilitas pro quarumlibet æquationum, problematumque conſtructione.

Quoniam autem ad conſtructionem æquationis, quæ ad nonam dimēſionem aſſurgebat,curvam ex genere ellipſium aſſumpſimus, cujus deſcriptionem nōdum tradidi;ideò paucis hic oſtendam,quomodò hæc etiam in plano deſcribi poſſit; ne idem mihi vitio vertatur, quod in aliis, ceù non omninò perfectum, notavi. Sed, ut veritati locus ſit, fatendum mihi eſt, rationem, qua hujuſmodi curvam deſcribam, non poſſe cum ea comparari, qua hyperbolas, vel parabolas deſcribo; non enim in ſimpliciſſimam incidere mihi contigit. Ideò autem hic exponam, cum, ut ſi fieri poſſibile ſit, aliquis acutiori, quam ego ingenio abundans veram,maximèque his curvis cōſonam methodum invenire poſſit, his mox dicendis inſtructus; tum, ut, ſi cui libeat in iis ſaltem locis componendis, quæ tertium gradum non excedunt, aliquid laboris inſumere, hanc curvam, qua opus eſt,etiam calleat. Sed ità hujus deſcriptio procedit.

In figura decima, ſit æquicrure triangulum ABL rectangulum in A.cuius æqualia latera ſint AL, AB. In uno autem æqualium laterum, ut AB,cōſtituatur rectus angulus ADB; ita ut latera DB, DA, indefinita ſint ad partes A, B; atquè per eadem hæc puncta liberè etiam excurrere poſſint; ut, dum recta ECD ſemper ſibi ipſi,& lateri AL parallela movetur, in latere BL dato ſui puncto, ut E,incedens,eundem

hunc

hunc rectum angulum ſecum ducat. Intellige autem, rectam ECD indefinitam ad partes D. Porrò in puncto *E* conſtituatur recta EB indefinita ad partes L, atquè circulariter mobilis in puncto E; hæc autem, ita nectatur in recta DB, ut cum eadem angulum rectum faciens, per illam liberè excurrere poſſit; ſed maneat etiam ſemper in latere *AB*, in quo angulum faciat cum DB, ita ut ubicumquè fuerit recta ECD, quemadmodũ apparet in recta GHF, angulus D ſit ſemper rectus, atquè in eadem recta GHF reperiatur, ut apparet in F: item angulus DBE ſit etiam ſemper rectus, ſemperque maneat in recta AB, ut videre eſt in puncto I; at recta BE tranſeat ſemper per punctum G, ut manifeſtè conſtat in recta GI. Dico angulum rectum ADB curvam AFDB deſcribere, cujus hæc erit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto ut F, ductaque FH perpendiculari ad AB, ſolidum, quod cõtinetur ſub quadrato AH in HB æquetur cubo à ducta FH. Ita verò ſe habet demonſtratio. Conſtructa figura, ut apparet, ita ut rectæ, quibus curva deſcripta eſt, in ea ſtatione ſint, in qua erant, cum deſcriptum eſt pũctum F: quoniam ex hyp. triangulum BAL eſt æquicrure, HG verò parallela AL, erit & HG æqualis HB(*a*). Quoniam autem anguli AFI, FIG ſunt recti; atque adeò AF, GI parallelæ inter ſe, erit AH ad HF, ut HI ad HG(*b*), ac propterea rectangulũ AHG, vel AH*B* æquale rectangulo FHI (*c*): quarè ſi tam rectangulum AHB, quam FHI ducantur in AH, erit ſolidũ ſub quadrato AH in HB æquale ſolido ſub tribus AH, *HF*, HI. Sed ſolidum ſub his tribus æquatur cubo HF(*d*); ergò patet, ſolidum ſub quadrato AH in HB æquari cubo HF. Q. E. F.

E quibus facillimè etiam deducitur ita eſſe quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad reliquam HB. Vndè manifeſtè cognoſcitur hanc curvam talem eſſe, quæ circulũ uno gradu excedat. In circulo enim ità eſt AH ad HF, ut eadem

(a) *4. ſex.* (b) *29. pr. 4. ſex.* (c) *16. ſex.*
(d) *36. Vnd.*

dem HF ad HB. Quoniam autem poſt latus quadratum ſequitur; ideò & poſt circulum illa ſubſequetur curva, in qua ita erit quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad HB. Quarè ab iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, omnia patent, quæ demonſtranda ſuſcepi.

Quòd ſi triangulum *BAL*, in eadem decima, non ſit æqui crure, curva AFDB eodem modo deſcripta illa erit, quæ ellipſim ſubſequetur, in qua videlicet ſolidum ſub quadrato *A*H in HB eandem habet proportionem ad cubum HF, ut latus AB ad latus AL. Quod ita demonſtratur. Quoniam parallelæ ſunt GI, *A*F, ſimilia erunt triangula AHF, GHI; quarè rectangulum AHG æquabitur rectangulo FHI (*a*); & ſi omnia ducantur in *A*H, erit ſolidũ ſub quadrato AH in HG æquale ſolido ſub tribus AH, H*F*, HI, vel cubo HF (*b*). Et quoniam ſolidum ſub quadrato AH in HG ad ſolidum ſub eodem quadrato AH in HB eandem habet proportionem, ac HG ad HB; quarè cubus *HF* ad ſolidum ſub quadrato *A*H in *H*B eandem habebit rationem, ac GH ad HB(*c*), vel LA ad AB (*d*). Ergo & ſolidum ſub quadrato *A*H in HB ad cubum HF eandem habebit proportionem, quam AB ad latus *A*L (*e*). Q. E. D.

Quod ſi curvam velimus, quæ hanc ſubſequatur, vel quæ ſecundum locum poſt circulum obtineat, ita in plano deſcribi poteſt.

In fig. Vnd. ſit ſemicirculus A*B*C, cujus diameter AC; recta autem B*D* ad diametrum *B*D applicata moveatur ſemper ſibi ipſi parallela ita, ut ejus punctum B maneat ſemper in ſemicirculo ABC. In eodem autem puncto B conſtituta ſit recta *B*E in angulo ſemirecto, quæque moveatur etiam motu rectæ *BF*, eundem ſemper cum ipſa angulum faciens, hoc eſt ſemper ſibi ipſi parallela. Porrò eadem BDF indefinitè producta ad partes F movere faciat angulum rectum AFE ita

(a) 4. & 16. *ſex.* (b) 36. *Vnd.* (c) 7. *Quinti.*
(d) 4. *ſex.* (e) 4. *Quinti.*

ita, ut vertex anguli maneat ſemper in recta BDF, & latera FA, FE tranſeant ſemper per puncta A, E, intellige autem punctum *E* eſſe ubi recta BE incidit in diametrum AC. Dico angulum rectum AFE curvam deſignare, in qua ſumto quolibet puncto F, atquè ab eo ducta *F* D perpendiculari, ſivè applicata ad diametrum AC, planoplanum, quod continetur ſub cubo *AD* in DC æquetur quadratoquadrato à recta DF. Quod ita patet. Conſtructa figura, ut apparet, quoniam rectus eſt angulus AFE, proportionales continuè erunt AD, DF, DE, vel *DB* (*a*); ac propterea, & qui ab ipſis cubi (*b*); hoc eſt, ita erit cubus AD ad cubum DF, ut idem cubus DF ad cubum *DE*, vel DB, vel ad ſolidum ſub tribus A*D*, DE, DC. Sed cubus DF ad ſolidum ſub tribus AD, *D*E, *D*C, eandem habet proportionem, ac DF ad DC; cubus enim DF, & ſolidum ſub tribus AD, DE, DC eandem habent baſim, rectangulum videlicet ADE (*c*); quarè & cubus AD ad cubum *D*F eandem habet rationem, ac recta *D*F ad rectam DC. Vndè patet planoplanum ſub cubo A*D* in DC æquari quadratoquadrato ſub DF. Quod erat demonſtrandum.

Cum itaquè demōſtratum in hac curva ſit, ita eſſe cubum AD ad cubum DF, ut eadem *D*F ad rectam DC, atquè angulus, quem facit F*D* cum diametro DC ſit rectus, cubus verò quadratum ſubſequatur, vel ſecundum locum poſt latus obtineat; ideò & hæc curvam, quam ſuperiori loco deſcripſi, uno gradu ſuperat; at circulum duobus.

Quod ſi pro circulo ellipſis adhibeatur, curva, quæ eodem modo deſcribetur talis erit, ut ellipſim planam, ſivè primam duobus etiam gradibus excedat, quemadmodum manifeſtè patet.

Hinc & locus per hanc æquationem deſignatus dy^3 diu. per $b \infty axx - x^3$ compoſitus jam erit; eſt enim ad curvam, quæ uno gradu ellipſim planam, aut circulum ſubſequitur:

I ſal-

(a) 8. *ſex.* & 6. *pr.* & 7. *Quinti* (b) 37. *Vnd.*
(c) 36. *Vnd.*

ſaltem ſi quantitates d,& b æquales fuerint; quemadmodum ſupra demonſtratum eſt . Si verò æquatio fuerit dy^4 diu. per $b \propto ax^3 - x^4$;locus erit ad curvam modò deſcriptam. Idem in altioribus dicendum .

Ex his autem, quæ uſquè adhuc dicta ſunt,ſatis, ut puto , manifeſtum eſt , Vir Præſtantiſſime , quantum incrementi Geometriæ acceſſerit ; ea enim ita in immenſum crevit , ampliorque effecta eſt,ut nullis jam limitibus contineri poſſit. An verò Carteſianam Geometriam,quam,ut à nonnullis accepi, inpoſterum explicãdam decreviſti ab hujus ſcientiæ publico Profeſſore, cuicumq; id oneris iniunctũ erit,quãque ipſe,una cum aliis explanandam coram Te ſuſceperam;non explanaverim modò, atquè in iis quæ difficillima ſunt ; ſed promoverim etiam,Tibi judicandum relinquo . Hæc autem non eò dico, quò Te, cæteroſque, quorum eſt, perſuaſos velim, ut mihi id oneris, atquè honoris à Vobis tribuatur, non enim ita mihi indulgeo, ut non planè videam, atquè cognoſcam, plurimos eſſe , qui acutiori ingenii acie prædici longè me in his , reliquiſque ſcientiis præſtant ; ſed ut Tibi pateat animi mei ſtudium , atquè obſequium, qui ita in Te exardeſcit, ut grandia, majoraque his offerre geſtiat, ſi modò mearum virium imbecillitas id ferret. Quod ſi Tibi hæc ingrata non erunt, non ſolum id mihi iucundiſſimum accidet; ſed & ad majora capeſſenda me induxeris;nil enim adeò difficile , aut arduum excogitari poſſe puto , quod ipſe aggredi non audeam Te Duce, Tuiſque auſpiciis fretus. Vale;Teque D.O.M. nobis pro bono literarum omnium incremẽto Neſtoreos annos ſervet. Ex S.Marci Oppido. Nonis Sext,

EPISTOLA
TERTIA

Ad Illuſtriſ. Clariſſimumque Virum, tum Generis ſplendore, tum morum, cæterarumque Virtutum ornamento

D. IOHANNEM
MICHAELEM GABANILIVM,

E MARCHIONIBVS S. MARCI,

equitum Catholici Monarchæ Præfectum, &c.

In qua de geneſi, atquè in plano deſcriptione infinitarum parabolarum, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum, &c. æquantur ſolido, vel quod ſub parametri quadrato in interçeptam, vel planoplano ſub cubo parametri in intercæptam.

Digitized by Google

ne, atquè tranſpoſitione exurget hujuſmodi æquatio $x^6 — qx^5 — ppx^4 — r^4xx * n^6 \infty 0$. Et patet, quod erat demonſtrandum.

Quod ſi centro A, aſymptotis AM, AL hyperbola ſecunda deſcribatur QK, ita ut ſolidum, quod ſub quadrato AR in rectam QR continetur æquetur n^3; atquè hæc circulum in aliquo puncto ut Q ſecet, ab eoque ad aſymptotum AM ducatur RQ parallela aſymptoto AL, recta AR erit propoſitæ æquationis falſa radix, quod facillimè cognoſci poteſt.

Atquè ex hujus æquationis conſtructione manifeſtè colligi poteſt, reliquas omnes quibuſcũq; ſignis, terminiſque affectas conſtrui poſſè, eaſque etiam, quæ ad quamlibet dimenſionem aſſurgunt. Vt enim aliquod exemplum afferam, ſi in figura 7. pro circulo ADC ponamus curvam, quæ ex genere ellipſium eſt, cujuſque hæc eſt proprietas, ut ſumto quolibet puncto, ut A, ductaque AE parallela aſymptoto AS ſolidum, quod continetur ſub quadrato *AB* in *BC* æquetur cubo applicatæ BA: hyperbola autem AO hanc curvam in aliquo puncto, ut A, ſecet, ducta DB parallela aſymptoto AS, intercæpta *AB* erit radix æquationis, quæ ad nonam dimenſionem aſſurgit. Potentia enim ſecundæ hyperbolæ AO ſtatuatur b^3 AC autem ſit a, AB verò indeterminata ſit x, BD ex proprietate hujus hyperbolæ erit b^3 diu. per xx, & hujus cubus b^9 diu. per x^6, & quoniã AB eſt x & AC a, erit BG, $a — x$, & ſolidum ſub quadrato AB in BC erit $axx — x^3$, quod cum æquari debeat cubo *BA*, habebitur hujuſmodi æquatio b^9 diu. per $x^6 \infty axx — x^3$, & facta multiplicatione per x^6, exurget æquatio novem dimenſionum, quæ per hos terminos exprimetur $x^9 — ax^8 * b^9 \infty 0$. Similiter ſi opus ſit ſex medias continuè proportionales inter duas datas invenire, quarum prima ſit a; ultima verò b: poſita prima ex inveniendis x habebitur hujuſmodi æquatio $x^7 \infty ba^6$, quam quidem ſatis expeditè hoc modo conſtruere poſſumus.

In fig. nona ſint duæ rectæ AB, AD ſe ſe ad quoslibet angulos, puta rectos, in puncto A interſecantes. Vertice autem

A,

A, axe verò AD, parametro autem prima ex datis, hoc eſt *a* parabola ſecũda deſcribatur AOC, ita ut cubus cujuſcumque applicatæ *CD* æquetur ſolido ſub parametri *a* quadrato in intercæptam AD (*a*). Similiter vertice *A*, axe verò AB parametro autem ultima ex datis *b*, ſecunda item parabola deſcribatur, qualem in prima epiſtola tradidi, in qua videlicet ordinatæ cubus æquatur ſolido ſub quadrato intercæptæ in parametrum: hæ enim parabolæ ſe ſe in aliquo puncto ſecabunt; ſecent itaquè in C, atquè ex hoc demittatur CD applicata ad axem AD; dico hanc eſſe primam ex quæſitis. Ducta enim CB ad angulos rectos, hoc eſt, ordinata ad axem *A*B, ſi C*D*, vel AB vocetur *z*, CB ex proprietate parabolæ *A*OC erit z^3 diu. per aa. Quoniam autem cubus CB, ſivè z^9 diu. per a^6, æquatur ſolido ſub quadrato AB in parametrum, hoc eſt, bzz. Ideò habebitur hujuſmodi æquatio z^9 diu. per $a^6 \infty bzz$; vel facta convenienti multiplicatione, atquè diviſione, exurget æquatio $z^7 \infty ba^9$. Q. E. D.

Ex hoc autem, & ſuperiori exemplo ſatis patet non benè à Carteſio inſtitutam eſſe problematum in certas claſſes diviſionem: ut ſupra etiam dictum eſt.

At verò prætereundum hoc loco non eſt, rationem inveniendi medias proportionales ope harum parabolarum pulcherrimam quidem eſſe, dum facillimè eadem uti poſſumus ad quaslibet inveniendas, variatis ſecundum opus fuerit, curvis. Si enim ambæ hæ parabolæ primæ fuerint, CD erit prima ex inveniendis, quando inter duas datas duæ mediæ proportionales inveniendæ ſunt. Quòd ſi curva AOC ſecunda parabola fuerit, qualem in tertia epiſtola deſcribo; at curva parabolica ASC ſit prima parabola; DC erit prima ex quæſitis, quando inter duas datas inveniendæ ſunt quatuor mediæ continuè proportionales. Si verò parabola ASC ſit ſecũda parabola in prima epiſtola deſcripta, *CD* erit prima ex inveniendis; quandò inter duas datas reperiri debent ſex me-

diæ

(a) *Vide Epiſt. tertiam.*

diæ continuè proportionales. Tandem ſi parabola AOC ſit ea, quam in tertia epiſtola tertiam voco; At parabola ASC ſit ſecunda ejuſdem tertiæ epiſtolæ, in qua cubus applicatæ æquetur ſolido ſub rectangulo ex datis in intercæptam, DC erit prima ex quæſitis;ſi inter duas datas inveniendæ ſint decem mediæ continuè proportionales; idem, ſi plures inveniendæ proponantur. Similiter demonſtrabo; id etiam accidere,ſi parabola,& hyperbola ad mediarum quarumlibet inventionem adhibeantur.

Ab his autem,quæ modò attuli,non parva oriri poteſt utilitas pro quarumlibet æquationum, problematumque conſtructione.

Quoniam autem ad conſtructionem æquationis, quæ ad nonam dimenſionem aſſurgebat,curvam ex genere ellipſium aſſumpſimus, cujus deſcriptionem nōdum tradidi;ideò paucis hic oſtendam,quomodò hæc etiam in plano deſcribi poſſit; ne idem mihi vitio vertatur, quod in aliis, ceù non omninò perfectum, notavi. Sed, ut veritati locus ſit, fatendum mihi eſt, rationem, qua hujuſmodi curvam deſcribam, non poſſe cum ea comparari, qua hyperbolas, vel parabolas deſcribo; non enim in ſimpliciſſimam incidere mihi contigit. Ideò autem hic exponam, cum, ut ſi fieri poſſibile ſit, aliquis acutiori, quam ego ingenio abundans veram,maximèque his curvis cōſonam methodum invenire poſſit, his mox dicendis inſtructus; tum, ut, ſi cui libeat in iis ſaltem locis componendis, quæ tertium gradum non excedunt, aliquid laboris inſumere, hanc curvam, qua opus eſt,etiam calleat; Sed ità hujus deſcriptio procedit.

In figura decima, ſit æquicrure triangulum ABL rectangulum in A.cuius æqualia latera ſint AL, AB. In uno autem æqualium laterum, ut AB,cōſtituatur rectus angulus ADB; ita ut latera DB, DA, indefinita ſint ad partes A, B; atquè per eadem hæc puncta liberè etiam excurrere poſſint; ut, dum recta ECD ſemper ſibi ipſi,& lateri AL parallela movetur, in latere BL dato ſui puncto, ut E,incedens,eundem

hunc

hunc rectum angulum ſecum ducat. Intellige autem, rectam ECD indefinitam ad partes D. Porrò in puncto *E* conſtituatur recta EB indefinita ad partes L, atquè circulariter mobilis in puncto E; hæc autem, ita nectatur in recta DB, ut cum eadem angulum rectum faciens, per illam liberè excurrere poſſit; ſed maneat etiam ſemper in latere A*B*, in quo angulum faciat cum DB, ita ut ubicumquè fuerit recta ECD, quemadmodū apparet in recta GHF, angulus D ſit ſemper rectus, atquè in eadem rectaGHF reperiatur, ut apparet in F: item angulus DBE ſit etiam ſemper rectus, ſemperque maneat in recta AB, ut videre eſt in puncto I; at recta BE tranſeat ſemper per punctum G, ut manifeſtè conſtat in recta GI. Dico angulum rectum ADB curvam AFDB deſcribere, cujus hæc erit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto ut F, ductaque FH perpendiculari ad AB, ſolidum, quod cōtinetur ſub quadrato AH in HB æquetur cubo à ducta FH. Ita verò ſe habet demonſtratio. Conſtructa figura, ut apparet, ita ut rectæ, quibus curva deſcripta eſt, in ea ſtatione ſint, in qua erant, cum deſcriptum eſt pūctum F: quoniam ex hyp. triangulum BAL eſt æquicrure, HG verò parallela AL, erit & HG æqualis HB*(a)*. Quoniam autem anguli AFI, FIG ſunt recti; atque adeò AF, GI parallelæ inter ſe, erit AH ad HF, ut HI ad H*G(b)*, ac propterea rectangulū AHG, vel AH*B* æquale rectangulo FHI *(c)*: quarè ſi tam rectangulum AHB, quam FHI ducantur in AH, erit ſolidū ſub quadrato AH in HB æquale ſolido ſub tribus AH, *H*F, HI. Sed ſolidum ſub his tribus æquatur cubo HF*(d)*; ergò patet, ſolidum ſub quadrato AH in HB æquari cubo HF. Q. E. F.

E quibus facillimè etiam deducitur ita eſſe quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad reliquam HB. Vndè manifeſtè cognoſcitur hanc curvam talem eſſe, quæ circulū uno gradu excedat. In circulo enim ità eſt AH ad HF, ut eadem

(a) *4. ſex.* (b) *29. pr. 4. ſex.* (c) *16. ſix.*
(d) *36. Vnd.*

dem HF ad HB. Quoniam autem poſt latus quadratum ſequitur; ideò & poſt circulum illa ſubſequetur curva, in qua ita erit quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad HB. Quarè ab iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, omnia patent, quæ demonſtranda ſuſcepi.

Quòd ſi triangulum *BAL*, in eadem decima, non ſit æqui crure, curva AFDB eodem modo deſcripta illa erit, quæ ellipſim ſubſequetur, in qua videlicet ſolidum ſub quadrato *A*H in HB eandem habet proportionem ad cubum HF, ut latus AB ad latus AL. Quod ita demonſtratur. Quoniam parallelæ ſunt GI, *A*F, ſimilia erunt triangula AHF, GHI; quarè rectangulum AHG æquabitur rectangulo FHI (*a*); & ſi omnia ducantur in *A*H, erit ſolidũ ſub quadrato AH in HG æquale ſolido ſub tribus AH, H*F*, HI, vel cubo HF (*b*). Et quoniam ſolidum ſub quadrato AH in HG ad ſolidum ſub eodem quadrato AH in HB eandem habet proportionem, ac HG ad HB; quarè cubus *HF* ad ſolidum ſub quadrato *A*H in *H*B eandem habebit rationem, ac GH ad HB(*c*), vel LA ad AB (*d*). Ergo & ſolidum ſub quadrato *A*H in HB ad cubum HF eandem habebit proportionem, quam AB ad latus *A*L (*e*). Q. E. D.

Quod ſi curvam velimus, quæ hanc ſubſequatur, vel quæ ſecundum locum poſt circulum obtineat, ita in plano deſcribi poteſt.

In fig. Vnd. ſit ſemicirculus A*B*C, cujus diameter AC; recta autem B*D* ad diametrum *B*D applicata moveatur ſemper ſibi ipſi parallela ita, ut ejus punctum B maneat ſemper in ſemicirculo ABC. In eodem autem puncto B conſtituta ſit recta *B*E in angulo ſemirecto, quæque moveatur etiam motu rectæ *BF*, eundem ſemper cum ipſa angulum faciens, hoc eſt ſemper ſibi ipſi parallela. Porrò eadem BDF indefinitè producta ad partes F movere faciat angulum rectum AFE ita

(a) 4. & 16. *ſex.* (b) 36. *Vnd.* (c) 7. *Quinti.*
(d) 4. *ſex.* (e) 4. *Quinti.*

ita, ut vertex anguli maneat ſemper in recta BDF, & latera FA, FE tranſeant ſemper per puncta A, E, intellige autem punctum *E* eſſe ubi recta BE incidit in diametrum AC. Dico angulum rectum AFE curvam deſignare, in qua ſumto quolibet puncto F, atquè ab eo ducta *FD* perpendiculari, ſivè applicata ad diametrum AC, planoplanum, quod continetur ſub cubo *AD* in DC æquetur quadratoquadrato à recta DF. Quod ita patet. Conſtructa figura, ut apparet, quoniam rectus eſt angulus AFE, proportionales continuè erunt AD, DF, DE, vel *DB* *(a)*; ac propterea, & qui ab ipſis cubi *(b)*; hoc eſt, ita erit cubus AD ad cubum DF. ut idem cubus DF ad cubum *DE*, vel DB, vel ad ſolidum ſub tribus A*D*, DE, DC. Sed cubus DF ad ſolidum ſub tribus AD, *D*E, *D*C, eandem habet proportionem, ac DF ad DC; cubus enim DF, & ſolidum ſub tribus AD, DE, DC eandem habent baſim, rectangulum videlicet ADF*(c)*; quarè & cubus AD ad cubum *D*F eandem habet rationem, ac recta *D*F ad rectam *D*C. Undè patet planoplanum ſub cubo A*D* in DC æquari quadratoquadrato ſub DF. Quod erat demonſtrandum.

Cum itaquè demõſtratum in hac curva ſit, ita eſſe cubum AD ad cubum DF, ut eadem *D*F ad rectam DC, atquè angulus, quem facit F*D* cum diametro DC ſit rectus, cubus verò quadratum ſubſequatur, vel ſecundum locum poſt latus obtineat; ideò & hæc curvam, quam ſuperiori loco deſcripſi, uno gradu ſuperat; at circulum duobus.

Quod ſi pro circulo ellipſis adhibeatur, curva, quæ eodem modo deſcribetur talis erit, ut ellipſim planam, ſivè primam duobus etiam gradibus excedat, quemadmodum manifeſtè patet.

Hinc & locus per hanc æquationem deſignatus dy^3 diu. per $b\infty axx - x^3$ compoſitus jam erit; eſt enim ad curvam, quæ uno gradu ellipſim planam, aut circulum ſubſequitur:

 ſal-

(a) 8. *ſex.* & 6. *pr.* & 7. *Quinti* (b) 37. *Und.*
(c) 36. *Und.*

ſaltem ſi quantitates d,& b æquales fuerint; quemadmodum ſupra demonſtratum eſt. Si verò æquatio fuerit dy^4 diu. per $b \propto ax^3 - x^4$; locus erit ad curvam modò deſcriptam. Idem in altioribus dicendum.

Ex his autem, quæ uſquè adhuc dicta ſunt, ſatis, ut puto, manifeſtum eſt, Vir Præſtantiſſime, quantum incrementi Geometriæ acceſſerit; ea enim ita in immenſum crevit, ampliorque effecta eſt, ut nullis jam limitibus contineri poſſit. An verò Carteſianam Geometriam, quam, ut à nonnullis accepi, inpoſterum explicãdam decreviſti ab hujus ſcientiæ publico Profeſſore, cuicumq; id oneris iniunctũ erit, quãque ipſe, una cum aliis explanandam coram Te ſuſceperam; non explanaverim modò, atquè in iis quæ difficillima ſunt; ſed promoverim etiam, Tibi judicandum relinquo. Hæc autem non eò dico, quò Te, cæteroſque, quorum eſt, perſuaſos velim, ut mihi id oneris, atquè honoris à Vobis tribuatur, non enim ita mihi indulgeo, ut non planè videam, atquè cognoſcam, plurimos eſſe, qui acutiori ingenii acie præditi longè me in his, reliquiſque ſcientiis præſtant; ſed ut Tibi pateat animi mei ſtudium, atquè obſequium, qui ita in Te exardeſcit, ut grandiã, majoraque his offerre geſtiat, ſi modò mearum virium imbecillitas id ferret. Quod ſi Tibi hæc ingrata non erunt, non ſolum id mihi iucundiſſimum accidet; ſed & ad majora capeſſenda me induxeris; nil enim adeò difficile, aut arduum excogitari poſſe puto, quod ipſe aggredi non audeam Te Duce, Tuiſque auſpiciis fretus. Vale; Teque D.O.M. nobis pro bono literarum omnium incremẽto Neſtoreos annos ſervet. Ex S. Marci Oppido. Nonis Sext.

EPISTOLA
TERTIA

Ad Illuſtriſs. Clariſſimumque Virum, tum Generis ſplendore, tum morum, cæterarumque Virtutum ornamento

D. IOHANNEM
MICHAELEM GABANILIVM,

E MARCHIONIBVS S. MARCI,

equitum Catholici Monarchæ Præfectum, &c.

In qua de geneſi, atquè in plano deſcriptione infinitarum parabolarum, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum, &c. æquantur ſolido, vel quod ſub parametri quadrato in interceptam, vel planoplano ſub cubo parametri in intercæptam.

Google

Illuſtriſs. Nobiliſſimoque Viro Domino

D. IOHANNI
MICHAELI CABANILIO
BARTHOLOMÆUS INTIERI S.P.D.

JUcundiſſimum quidem mihi accidit, quod nuper de parabolis, quas modò tradam, invenire mihi cōtigit, hac potiſſimum de cauſa, quia his meum in Te amorem, ſtudium, & obſequium, quibus ſemper Te colui, atquè obſervavi; ſemperque, colam, atquè obſervabo, notum quidem aliqua ex parte reddere poſſem. Etenim pro certo habe, me ità Tibi ob egregias animi Tui dotes devinctum eſſe, ut nihil potiùs habuerim, de quo majori ſtudio laboraverim, quam ut occaſio mihi daretur aperiendi Tibi animum meum, qui Te ſumma cum veneratione proſequutus eſt. In Te enim uno omnia ea ſplēdent, atquè elucent, quæ Viros clariſſimo genere natos, & optimis, ſanctiſſimiſque moribus inſtitutos maximè decent. Fervet generoſum Tuum pectus veræ laudis, & gloriæ amore; undè Majorum Tuorum, qui bello, & pace inſignes Cabanilium nomen ad aſtra extulere, veſtigia ſequens, inter

ſan-

ſanguinei Martis pericula Te immittis, Tuumque Caput, quod Deus Optimus Max: Tuis, mihique,& Patriæ incolume ſervet, maximis obiectare periculis non dubitas. Hoc etiam in Te admiramur,quod nunquam,aut raro in iis,

Qui caſtra ſequuntur

accidit, Tibi ſcilicet inter cædes, feroſque belli tumultus, non minus Pietatem cordi eſſe, quam dum hic inter nos, Conſanguineoſque Tuos, non ſinè ingenti omnium admiratione obverſabaris: ex quo(crede mihi)ſumma Tibi laus provenit. Quòd enim,cum opus eſt,& conſilio,& manu polleas; quòd omnes morum ſuavitate vincas;quòd diſciplinis omnibus ornatus,& Muſis pariter,& bellicis rebus operam naves; hoc quidem magnum. Quòd verò miles,

Et primo in flore Iuventæ

ità Te belli præbeas, qualem in facris ſanctiſſimorum virorum cætibus religioſum hominem eſſe decet; maximum hoc eſt, omnique gloria majus; quo bonorum omnium animos Tibi ità devincis, ut nullus ſatis ſibi eſſe poſſit in Te laudando, atquè extollendo. Nunc itaquè hæc ad Te,qualiacumque ſint,mitto, quibus & Tibi, & cuicumque hæc legerit manifeſtum ſit,me ex eorum numero eſſe, qui Te ſummo amore, ſummo ſtudio, totòque animo colunt, atquè obſervant. Quid enim præſtantius excogitari unquam poteſt,quàm virtutes tota animi contentione in honore habere? At profectò, dum omni, qua poſſum veneratione,Te cūctis virtutibus ornatum proſequor, id me omninò curare quiſque noverit.Accedit etiam,quòd hæc inventa infirmis ingenii mei viribus excogitata, multaque adhuc lima egentia,cum præclaram nominis Tui inſcriptionem præſeferant, eorum rabiem, denteſque effugient, qui iniquo livore exagitati, nil aliud prorſus curant, quàm aliena ſcripta lacerare, ipſos verò authores ſævis, atroquè conſperſis veneno dictis inceſſere. Quòd ſi quis verò ita mihi, ſcriptiſque meis iniquus, tantum oris habuerit, ut me Tua tutela, præſidioque munitum petere nihilominus audeat, id pro certo habe, me nihil penitus talia curare; modò non in-

gra-

grata nec iniucunda fuerint,quæ libens Tibi offero. Id enim ſi accidet (quod Di precor faxint) abſque dubio certus ero, omnibus etiam accepta fore, qui de his diſciplinis benemeriti, an aliquid boni iſta contineat judicare poſſunt.

Quæ verò excogitata à me ſunt, illa ipſiſſima eſſe ſcies, de quibus Tecum ſæpiſſime colloquutus ſum,

Exercet dum ſol raucas per rura cicadas

in his amœniſſimis, fælicibuſq; cœli tẽperie regionibus; multò quidẽ fælicioribus, quòd à Parente tuo, noſtri ſæculi ornamẽto, cui plurimũ bonæ literæ debẽt, gubernãtur, atquè regũtur: ea, inquam, illa ſunt, quæ Tu ipſe perquam utilia geometricis rebus cognoſcens, me aſſiduè ſtimulis concitabas, ut in his inveniendis omni cura incumberem, Tuam inſuper mihi operam ſpondens, quantum majora ſtudia, quibus tunc temporis totum Te dederas, paterentur. Poſtquam autem ad munus obeundum, quod in præſentia fæliciter, & pro Tua dignitate geris, profectus es; dum hìc in amœna Villa, quæ à *Divo* Severo nomen habet, morã cũ Tuis facio, ut mærem, quem ex Tua profectione concæperamus, ex animo demeremus, ea mihi invenire contigit, à quibus tanta perfuſus lætitia fui, ut & amœna vireta, placidique leni ſuſurro fontes, dulceſque avium concentus, cæteræque ruris deliciæ, quibus locus hic, non ſine largo Naturæ dono, abundat, ſorderent. Etenim nihil deindè animo verſare cæpi, quam novum hoc inventum expolire, atquè omnibus numeris abſolvere; ſi meæ vires id ferrent. Verùm quia id non exigua temporis mora opus habuiſſet; æquum duxi, hæc Tibi, ut primò à me inventa ſunt, dicare, atquè mittere, quæ ad geneſim, atquè in plano deſcriptionem ſpectant earum parabolarum, quarum æquationes conſtitutivæ duobus terminis exprimuntur, quorum unum ignota una quomodolibet in ſe ducta conſtituit; reliquum verò altera ignota, ità in datam quantitatem ducta, ut numerus dimenſionum notæ quantitatis excedat numerum dimenſionũ ignotæ. Quomodò autem reliquæ parabolæ, nec non hyperbolæ

in

in plano ortum ducant, cognoſcere poteris ex iis, quæ ad Excellentiſſimum Dominum D. Dominicum Iudice Iuvenacii Ducem, &c. & ad Illuſtriſſimum Dominum D. Didacum Vincentium à Vidania Regii Sacelli Præſulem, ſcripta ſunt. Sed nec hìc rurſus exponam, quomodò prima parabola (pro prima autem parabola Apollonianam intelligo) in plano perquam facillimè, atquè tali methodo, ut & in cæteris altioribus deſcribendis locum habeat, delineari poſſit; id enim ſuprà factum eſt. Quarè ſecundæ parabolæ deſcriptionem primo loco aggrediar.

Verùm manifeſtum eſt in ſecundo genere parabolarum duas quidem comprehendi; quarum altera hac proprietate gaudet, ut ſolidum ſub quadrato intercæptæ in datam rectā, ſivè parametrum æquetur cubo applicatæ: alterà verò in qua ſolidum ſub quadrato parametri in intercæptam æquetur cubo applicatæ. Illa quidem ſupra deſcripta eſt; hanc verò ita deſcribo, ſed quidem ipſiſſima methodo, ac ſupra factum eſt.

In figura enim prima hujus epiſtolæ vertice A, diametro quacumque *AG*, parametro autem recta E*B* data, parabola prima deſcribatur *ACH*(*a*), ità ut applicatæ ad eandem diametrum *AG* ſint parallelæ ipſi AB parabolam AC in vertice A tangenti. Recta autèm CED, parallela diametro AG, ita ſemper moveri concipiatur, ut punctum ejus C ſit ſemper in parabola, ipſa verò ſemper ſibi ipſi parallela exiſtat. In recta autem AE*B* conſtituatur recta data *EB*, quæ liberè excurrere poſſit, ita ut ſemper in ipſa applicata maneat: ſed hanc movere faciat recta D*E*C. In puncto autem, ſivè vertice A recta conſtituatur AD circulariter in ipſo mobilis, quæ ſemper parallela exiſtat rectæ lineæ, quæ per puncta C, B, tranſit; ut in fig. apparet. Interſecabunt itaquè ſeſe recta AD, & CD, quæ indefinitæ intelligi debent ad partes D, ut patet ex elementis. Dico ex hac interſectione curvā genera-

(a) *In pr. Epiſt.*

rari, quæ ſecunda parabola erit; cujus quidem vertex erit *A*, idem, qui parabolæ AC; diameter verò AF; at applicatæ ad eandem eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipſi AB ad AF ducuntur: præcipua verò hujus curvæ proprietas erit, ut cubus cujuſcumque ex applicatis, ut *D*F, æquetur ſolido, quod continetur ſub rectangulo ex recta BE, & parametro parabolæ, vel quia EB eſt ipſa diameter, ſub quadrato BE in intercæptam AF. Id verò ita demonſtro. Similia ſunt triangula, CE*B*, *A*ED (*a*); ergò ita *D*E ad *A*E, ut CE ad EB; Quòd ſi tam CE, quàm *E*B ducantur in parametrum; erit ita DE ad AE, ut rectangulum ſub CE in parametrum, vel ut quadratum AE (*b*) ad quadratum EB, nam EB eſt ipſa diameter: ergò cubus AE, ſivè applicatæ DF æquatur ſolido, quod continetnr ſub *D*E, vel intercæpta AF in quadratum EB, vel ſi EB non fuerit æqualis parametro; ſolido, quod continetur ſub DE, vel AF intercæpta in rectāgulum, quod continetur ſub parametro parabolæ AC, & recta data EB.

Hinc autem patet A eſſe verticem curvæ modò deſcriptæ AOD; rectam autem AF, ſivè ipſam diametrum AG productam, fore diametrum: rectas verò omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipſi *A*EB ducuntur, eſſe ad eandē diametrum AF ordinatim applicatas, quæ quidem, ſi eadem curva ad partes M continuetur, productæ, ita ut in curva terminentur, bifariam ab ipſa diametro dividentur: quæ omnia ità facillima ſunt, ut demonſtratione penitus non egeant.

Quomodò verò ipſa hæc curva ab altera parte continuari poſſit, ità patet. In eadem figura, producatur AE ad partes I; tū recta HLM parallela diametro AG, dato ſui pūcto H ſemper ſibi ipſi parallela moveatur in parabola AH, ut ſupra de recta DEC dictum eſt: motu autē ſuo movere etiam faciat

 re-

(a) *Hyp.* 29. *pr.* & 4. *ſex.* (b) 11. *lib. pr. Apoll. vel per ea, quæ in pri. Epiſt. demonſtrata ſunt.*

Digitized by Google

rectam LI, ſemper applicatā in recta AI; at in extremo puncto ejuſdem, ut I, recta conſtituatur IH, quæ etiam per punctum H tranſeat: huic autem parallela exiſtat recta AM indefinita ad partes M: nam curva, quæ ex interſectione rectarum HM, MA producitur, erit eadem ab altera parte continuata; cujus quidem demonſtrationem non affero.

Sed & de hac curva ea omnia demonſtrari poſſunt, quæ in prima epiſtola de ſecunda parabola dicta ſunt, videlicet omnes rectas, quæ diametro AF æquidiſtantes ducūtur, modò genitæ curvæ in uno tantum puncto occurrere, productaſque eandem ſecare; quæ verò angulum cum diametro AF faciunt curvæ in duobus punctis occurrere; item rectas omnes, quæ ex vertice A ad aliquod curvæ punctum ducuntur, totas intra curvam cadere, productas verò totas extra, & plurima alia, quæ brevitati ſtudens prætermitto.

Quòd autem modò deſcripta parabola ſecunda dicenda ſit, hinc etiam patet. Prima parabola, ſivè Apolloniana illa eſt, in qua data recta ad applicatam eandem habet rationem, ac eadem applicata ad intercæptam: quoniam verò poſt latus quadratum ſubſequitur, ideò & ſecunda parabola illa dicēda erit, in qua ita eſt data recta ad applicatam, ut ejuſdem applicatæ quadratum ad quadratum intercæptæ; tertia verò parabola, &c. ut in prima epiſtola demonſtratum eſt. Eadem etiam ratione illa ſecunda parabola vocari poterit, in qua ita erit quadratum cujuſcumque datæ rectæ ad quadratum applicatæ, quemadmodum eadem applicata ad intercæptam: quarè cum hoc ita ſe habere in curva modò genita demonſtratum ſit: manifeſtum eſt, eandem ſecundam parabolam dici poſſe. Similiter, quoniam poſt quadratum cubus ſubſequitur; ideò & tertia parabola illa erit, in qua ita eſt cubus cujuſcumque datæ ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam. Idem in cæteris dicendum. At quoniam à nonnullis prima parabola, plana etiam nominatur; ideo & quam ſecundam dixi, ſolida, vel cubica appellari poterit; ita tertia planoplana, vel quadratoquadratica ab

ipſarum præcipuis proprietatibus; idem in cæteris obſervandum.

At verò operæ pretium eſt, ut & nomina iis curvis imponam, quibus in cæterarum parabolarum deſcriptione mentio deinceps facienda eſt. Quarè curva AC, cuiuſcumque generis fuerit, DIRECTRIX eſto. Recta CED, quæ ſemper ſibi ipſi parallela movetur, DESCRIBENS. Quæ verò in puncto A circulariter moveri debet, EFFICIENS. Data EB, INTERVALLVM dicatur; punctū, ſivè vertex A, POLVS.

His verò præmiſſis tertiæ parabolæ deſcriptionem aggrediar. Tertia autem parabola ex ſupra allatis illa eſt, in qua datæ cubus eandem habet rationem ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam; hanc autem ita, immutata tantummodò Directrice, deſcribo.

In figura prima huius epiſtolæ intelligatur parabola Directrix AC eſſe non prima, ſed ſecunda, & modò deſcripta; tam autem Deſcribens, quam Efficiens iiſdem, ut ſuprà, motibus cieri concipiantur. Polus autem ſit eiuſdem parabolæ vertex. Intervallum verò eiuſdem ſecundæ parabolæ Directricis parameter. Dico ex Deſcribentis, Efficientiſque interſectione curvam AOD procreari, in qua ducta DF parallela ipſi AB, planoplanum ſub cubo Intervalli EB in intercæptam AF æquabitur quadratoquadrato DF; vel in qua cubus Intervalli eandem habebit rationem ad cubum applicatæ FD, ut eadem FD ad intercæptatam AF. Demonſtratio autem eodem modo procedit, ac illa, qua in ſecunda parabola uſus ſum. Quod, ut reor, methodi elegantiam demonſtrat. Hæc autem ita ſe habet. Quoniam, ut ſupra dictum eſt, ſimilia ſunt triangula AED, CEB, erit DE ad EA, ut EC ad EB; quòd ſi tam EC, quàm EB in quadratum EB ducantur, erit DE ad EA, vt ſolidum ſub quadrato Intervalli EB in EC ad cubum EB; ſed ex iis, quæ modò in ſecunda parabola demonſtrata ſunt, ſolidum ſub quadrato EB parametri in EC æquatur cubo AE? ergò & DE ad AE eandem habebit proportionem, ac cubus eiuſdem AE, vel ap-

 pli-

plicatæ DF ad datum cubum parametri (a); vel ita erit datus cubus ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam (b); vel planoplanum ſub cubo Intervalli EB in intercæptam AF æquabitur quadratoquadrato applicatæ DF; cumque id accidat ubicumque aſſumptum fuerit punctum D, patet deſcriptam curvam illam eſſe, quam deſcribere ſuſceperam.

Quæ autem ſupra de ſecunda parabola dicta ſunt, eadem omnia & de hac intelligi debent; quemadmodum etiam & de omnibus iis, quas quis imaginatus fuerit. Illud autem ſilentio præterire nolo in ſecũda parabola cubos ab applicatis eſſe inter ſe, ut ſegmẽta intercæptarũ inter applicatas, & verticẽ; in hac verò tertia ita inter ſe ſunt quadratoquadrata ab applicatis, ut ſegmenta intercæptarum inter eaſdem applicatas & verticem. Idem in altioribus dicendum, modò quæ hic de quadratoquadratis, in quarta de quadratocubis, in quinta decubocubis, & ita deinceps.

Sed & hæc curva eadem ratione, ac ſupra factum eſt ab altera parte continuari poteſt, ita ut ſuperfluum putem in his amplius immorari, undè ad quartæ parabolæ deſcriptionem tranſitum faciam.

Quarta autem parabola ex iis, quæ ſupra dicta ſunt illa eſt, in qua ita eſt datum quadratoquadratum ad applicatæ quadratoquadratum, ut eadem applicata ad intercæptam; vel in qua planoſolidum ſub dato quadratoquadrato in intercæptam æquatur quadratocubo applicatæ. Hæc verò ita eadem methodo deſcribitur.

In eadem fig. ut ſupra, pro Directrice AC conſtituatur non ſecũda, ſed tertia parabola modò deſcripta; curva enim, quæ Deſcribente DC, Efficiente autem AD, Polo vertice A, Intervallo recta EB æquali parametro parabolæ Directricis deſcribitur, quarta parabola erit. Sũto enim in ipſa quolibet pũcto, ut D, cõſtructaque figura, ut apparet, ſimilia item erũt trian-

(a) 7. *Quinti.* (b) 4. *Quinti.*

triangula DEA, CEB; ergò ita DE ad AE, ut *CE* ad EB; vel multiplicatis CE, *EB* per cubum Intervalli *BE*, ita erit DE ad AE, ut planoplanum ſub cubo *BE* in *CE*, vel ex proprietate tertiæ parabolæ Directricis, ut quadratoquadtatum *AE* ad quadratoquadratum Intervalli BE (*a*), vel ità erit quadratoquadratum Intervalli ad quadratoquadratum *AE*, vel applicatæ DF, ut eadem DF ad ED, vel intercæptam AF(*b*); vel planoſolidum ſub quadratoquadrato Intervalli in intercæptam æquabitur quadratoquadrato applicatæ. Q.E.D.

Eadem ratione, ſi pro tertia parabola Directrice quartam modò deſcriptam ponamus, curva procreabitur AOD, in qua ſumto quolibet puncto, ut *D*, ductaque DE parallela diametro AF ſolidoſolidum, quod continetur ſub planocubo Intervalli in intercæptam æquabitur cubocubo applicatæ; hoc eſt curva procreabitur, quæ quinta parabola erit. Etenim, ut ſupra, ſimilia ſunt triangula ADE, CEB; ergò ita DE ad *AE*, ut CE ad *EB*, vel facta congrua multiplicatione per planoplanum ex BE, erit etiam DE ad AE, ut planoſolidum ſub CE in quadratoquadratum *EB* ad quadratocubũ EB, ſivè ex proprietate huius parabolæ Directricis, ita DE ad AE, ut quadratocubus A*E*, ad quadratocubum E*B*; hoc eſt, ità datus quadratocubus ad quadratocubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam; e quibus patet ſolidoſolidum ſub planocubo Intervalli in intercæptam æquari cubocubo applicatæ. Q. E. D.

Simili ratione, & cæteræ in infinitum parabolæ deſcribi poſſunt, modò curva pro Directrice aſſumatur, quæ proximè deſcribendam anteeat. Nec puto, faciliorem methodum excogitari poſſe, qua pari elegantia in plano deſcribantur.

At prætermittenda hoc loco non eſt alia etiam ratio, qua eædem parabolæ deſcribi poſſunt ope earum hyperbolarum, quæ in ſecunda epiſtola deſcriptæ ſunt. Ea autem huiuſmodi eſt.

In

(a) *7. & 12. Quinti*. (b) *4. Quinti*.

In figura ſecunda huius epiſtolæ circa aſymptotos *A*B,*A*G ad angulos rectos in puncto A iunctas hyperbola prima deſcribatur CZ,cujus potentia ſit quadratum à recta S.In centro autem A collocetur rectus angulus DAC circulariter mobilis in puncto A; recta autem CED parallela aſymptoto *A*G, ita ſemper ſibi ipſi parallela moveri concipiatur,ut dato ſui puncto C maneat ſemper in hyperbola CZ, motu autem ſuo movere etiam faciat, ſecumque ducat latus AC, ita ut idem hoc latus tranſeat ſemper per punctum C; ergo fiet interſectio hujus rectæ CD, & reliqui lateris AD. Dico ex hac interſectione curvam generari, quæ ipſiſſima erit,ac illa, quæ ſuperius ſecunda parabola dicta eſt; ita ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D,ductaque DF,huius cubus æquetur ſolido, quod continetur ſub intercæpta AF in hyperbolæ potentiam. Demonſtratio verò ita procedit.Quoniam angulus A eſt rectus, recta verò A*E* perpendicularis ipſi CD ex hyp. erit DE ad EA, ut eadem AE ad EC: quòd ſi tam *A*E, quàm EC per E*A* multiplicentur,erit DE ad *A*E,ut eiuſdem *A*E quadratum ad rectangulum *A*EC; Sed rectangulum *A*EC æquatur potentiæ hyperbolæ? (*a*); ergò & ita DE ad AE, ut eiuſdem AE quadratum ad hyperbolæ potẽtiam: & patet propoſitum. Atquè hæc etiam demonſtrationis methodus locum in altioribus habet.

Cæterum, ut ſupra dictum eſt, hyperbola CZ vocari poteſt Directrix, CD verò Deſcribens AD Efficiens, punctum autem A, ſivè centrum hyperbolæ Polus. Quomodò autem ab altera parte hæc curva continuari poſſit, ſatis ex appoſita fig.per ſe patet,in qua Directrix eſt curva HIS,quæ etiã hyperbola eſt,cuius potentia æquatur potentiæ hyperbolæ CZ, hoc eſt quadrato rectæ S, Deſcribens verò HM; & Efficiens AM, &c.

Ad deſcribendam verò tertiam parabolam, eadem manente Deſcribente, atquè *E*fficiente, hyperbola CZ non ſit pri-

(a) *Ex iis, quæ in ſecunda epiſt. dem. ſunt.*

prima, ſed ſecunda, qualis in ſecunda epiſtola deſcripta eſt, in qua videlicet ſolidum ſub quadrato AE in EC æquetur dato ſolido; nam curva, quæ hac Directrice deſcribitur tertia parabola erit, cujus vertex erit A, diameter AF, ut ſupra: quadratoquadratum verò cuiuſcumque applicatarum, ut DF æquabitur planoplano ſub potentia hyperbolæ Directricis in interceptam AF. Demonſtratio verò eadem prorſus ratione, ut ſupra, procedit. Etenim cum ſit DE ad AE, ut eadem AE ad EC, ſi tam AE, quam EC multiplicentur per quadratum AE, erit DE ad AE, ut ejuſdem AE cubus ad ſolidum ſub quadrato AE in EC; vel ex proprietate hujus ſecundæ hyperbolæ ad datum ſolidum. Quarè patet planoplanum ſub DE, vel intercæpta AF in potentiam hyperbolæ Directricis æquari quadratoquadrato AE, vel applicatæ DF. Quod erat demonſtrandum.

Quòd ſi pro hac ſecunda hyperbola Directrice, tertia ponatur; quarta parabola procreabitur; ſi verò quarta hyperbola aſſumatur, quinta exurget parabola, & ita deinceps, quæ omnia facillima demonſtratu ſunt, cum & ipſa demonſtratio ad inſtar ſuperioris concinnanda ſit. Similiter ex iis, quæ in prima parabola dicta ſunt, manifeſta etiam evadit ratio, qua & eædem parabolæ in plano deſcribi poſſint, cum data poſitione diameter non eſt axis. Quarè his omnibus prætermiſſis ad eorum locorum compoſitionem accedam, quæ adhuc componenda ſuperſunt.

Hæc autem ſunt ea omnia, quorum æquationes duobus terminis exprimuntur, quorum alterum ignota quomodolibet in ſe ducta conſtituit; reliquum verò ignota altera in datam quantitatem ducta, ut numerus dimenſionum ignotæ non excedat numerum dimenſionum notæ quãtitatis. Quæ loca, poſtquam demonſtravero, quomodò componi poſſint, id quod ſupra me facturum recepi, præſtaſſe cognoveris.

Primus itaquè locus, qui ſe poſt ſolida componendum præbet, per hujuſmodi terminos exprimitur $x^3 \infty aay$. (quanti-

titates x, & y indeterminatas; a verò, & quæ per ſimiles deſignãtur, notas, datasq; intellige) ſi itaque in fig. prima huius epiſtolæ, *A* ſit immutabile initium quantitatis indeterminatæ x, quæque per rectam poſitione datam *AEB* ſeſe extendere intelligatur; y verò ſupra hanc in dato angulo exurgere concipiatur, puta AED (hæc autem ita ſemper ſe habeant in cæteris deinceps locis componendis, ne eadem ſæpius repetendo moleſtiæ Tibi ſim) facillimè quidem conſtrui idem poterit; ex puncto enim *A*, opus eſt rectam ducere AF in dato angulo *AED*; tum producta etiam ad partes G, oportet vertice *A*, diametro AG parabolam primam deſcribere, cujus parameter ſit recta a, applicatæ verò rectæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipſi *AE* ducuntur; Si enim Polo vertice A, Directrice verò modò deſcripta prima parabola AC, Intervallo EB æquali a; quod quidem Intervallum per rectam AE incedere concipiatur. *D*eſcribente verò recta CED, Efficiente autem A*D* curva deſcribatur AOD erit hæc locus quæſitus. Sumto enim in ipſa quolibet puncto, ut D, ductaque DE, ſi A*E* dicatur x; recta verò ED y: cum ex iis, quæ ſuperius demonſtrata ſunt cubus AE, vel DF, ſivè x^3 æquetur ſolido ſub quadrato EB, ſivè Intervallo in rectam ED, vel AF, hoc eſt aay; habebitur hujuſmodi æquatio $x^3 \propto aay$, & patet propoſitum. Nec abſimili ratione operandum, ſi conſtruenda æquatio his terminis deſignetur $y^3 \propto aax$.

Quòd ſi locus componẽdus his terminis notetur $x^4 \propto a^3y$ eadem facilitate habebitur propoſitum; modò vertice A, diametro AF, Intervallo autẽ recta a, quæ æquetur parametro Directricis, parabola deſcribatur, quã ſupra tertiã parabolam nuncupavimus, hæc enim locus erit quæſitus. Ex quolibet enim huius puncto, ut D, demiſſa recta D*E*, parallela diametro AF, reliquiſque conſtitutis, ut in figura prima apparet, ſi AE dicatur x, DE y; cum quadratoquadratum à recta *AE*, vel DF æquetur planoplano ſub cubo Intervalli in ED, vel AF, habebitur hujuſmodi æquatio $x^4 \propto a^3y$; & patet pro-

propoſitum. Eadem ferè methodo locus conſtruetur hujuſmodi $y^4 \infty a^3 x$.

Si verò æquatio per quam locus exprimitur ad quintam dimenſionem aſſurgat, atquè his terminis exprimatur $x^5 \infty a^4 y$; facillimè haberi poteſt compoſitio. Si enim exiſtente A initio quantitatis x, parabola quarta deſcribatur AOD, omnibus, ut ſupra poſitis, hæc locus erit quæſitus; quod demonſtratione non eget.

At verò fieri etiam poteſt, ut, & alia ſub hoc eodem genere conſideranda parabola veniat, cuius ope locus his terminis expreſſus $x^5 \infty a^3 y^2$, componi poteſt, quemadmodum ex iis, quæ in prima epiſtola dicta ſunt, patet. Quomodò verò hujuſmodi parabolam deſcribere poſſibile ſit, modò expoſita methodus id manifeſtè demonſtrat. In eadem quippè hujus epiſtolæ figura, vertice A, diametro AG, parametro autem recta, quam in æquatione vocavi a, parabola ſecunda deſcribatur AC, in qua cubus cujuſcumque ex applicatis æquetur ſolido, quod continetur ſub intercæptæ quadrato in parametrum a: applicatæ autem ad diametrum AG parallelæ ſint recta AE poſitione datæ. Directrice deindè hac parabola, Deſcribente verò recta CD ſemper parallela diametro AG, Efficiente autem AD, Polo A, atque Intervallo recta EB, vel a, curva deſcribatur AOD: dico hanc eſſe locum quæſitum. Sumto quippè in ipſa aliquo puncto, ut D, ductaque DE parallela diametro AF, reliquiſque conſtructis, ut in figura apparet. Quoniam, ut ſupra dictum eſt, ſimilia ſunt triangula CEB, AED, erit & AE ad ED, vel x ad y, ut EB ad EC, vel ut a ad quartam, quæ erit ay diu. per x. Quoniam verò ſolidum ſub quadrato ejuſdem CE, hoc eſt $aayy$ diu. per xx in parabolæ AC parametrum, quæ etiam eſt a hoc eſt a^3yy diu. per x^2 æquatur cubo CG, vel AE, hoc eſt x^3; ideò habebitur hujuſmodi æquatio a^3yy diu. per $x^2 \infty x^3$, & facta congrua multiplicatione per xx habebitur $a^3yy \infty x^5$; undè patet hanc eſſe locum quæſitum.

Sed hujus parabolæ vertex erit etiam punctum A; diameter verò AF, parameter a; applicatæ autem eæ omnes,

quæ ipſi AB parallelæ ducuntur. At præcipua hujus curvæ proprietas erit, ut quadratocubus cujuſcumque ex applicatis æquetur planoſolido ſub cubo Intervalli EB in quadratum intercæptæ AF; demonſtratio verò eadem ratione, ac reliquæ, procedit. Quoniam enim ſimilia ſunt triangula DEA, ECB; erit & quadratum *DE* ad quadratum A*E*, ut quadratum *E*C ad quadratum *EB* (*a*): quòd ſi tam quadratum EC, quam quadratum *EB* ducantur in *EB*; erit quadratum DE ad quadratum AE, ut ſolidum ſub quadrato EC in EB, hoc eſt ut cubus AE ad cubum EB; ergò quadratocubus AE, vel applicatæ DF æquabitur planoſolido ſub quadrato DE in cubum Intervalli. Q. E. D.

Sed ſi locus componendus per æquationem exprimatur, quæ ad ſextam dimẽſionem aſſurgat; cum unica curva, quæ ſub hoc genere cadit, opus ſit: facillimè componi poterit: quarèad eorum locorum compoſitionem tranſitum faciam, quorum æquationes ad ſeptimam poteſtatem aſſurgunt.

Quoniam verò in prima epiſtola ea loca compoſita fuere, quæ per hos terminos exprimebãtur $x^7 \infty ay^6$. $x^7 \infty aay^5$. $x^7 \infty a^3y^4$; ea hoc loco componenda ſuperſunt, quæ his terminis deſignantur $x^7 \infty a^6y$. $x^7 \infty a^5yy$. $x^7 \infty a^4y^3$. his verò ad finem perductis nullus alius locus ſupereſt ad parabolam.

Si itaque primo loco hæc æquatio $x^7 \infty a^6y$ componenda proponatur, nullo negotio id aſſequi poterimus, beneficio ejus curvæ, quæ ſexta parabola dici poteſt, hæcque in hunc modũ allata methodo deſcribitur. Curva *D*irectrix AC ea ſit, quam ſupra quintam vocavi, in qua ſolidoſolidũ ſub planocubo dato a^5 in intercæptam æquetur cubocubo applicatæ: tum iiſdem *D*eſcribente, Efficiente, Polo, & Intervallo æquali *a*, curva deſcribatur AOD, & hæc erit locus quæſitus, quod quidem demonſtratione non eget.

Si verò locus hic $x^7 \infty aay^5$ componẽdus proponatur, curva quæ hac ratione deſcribi poteſt, dabit, quod faciendum proponitur. In eadem figura prima omnibus, ut ſupra, poſitis,

(a) 4. & 20. ſex.

ſitis., Directrix AC ea ſit, quæ proximè ſuperiori loco deſcripta fuit, in qua quadratocubus cuiuſcumque applicatarum, ut CG æquetur planoſolido ſub quadrato intercæptæ in cubum datæ, puta. Intervalli BE; curva enim AO*D* hac proprietate prædita erit, ut quadratoquadratocubus cujuſcumque ex applicatis, ut DF æquetur ei, quod producitur ex multiplicatione quadratocubi Intervalli in quadratum intercæptæ AF. Etenim cum ſit, ut quadratum DE ad quadratum AE, ita quadratum CE ad quadratum EB; vel facta multiplicatione quadratorum CE, EB in cubum *BE*, ut quadratum DE ad quadratum AE, ita planoſolidum ſub quadrato EC in cubum EB ad quadratocubum EB; vel ex proprietate parabolæ Directricis, ut quadratocubus AE ad quadratocubum Intervalli EB? erit etiam, ut quadratum DE ad quadratū AE, ita quadratocubus ejuſdem AE ad quadratocubum EB; & patet propoſitum. Hinc ſi Intervallum EB dicatur *a*, AE verò, atque ED, eadem, quæ ſupra, nomina retineant; cum ſit, ut quadratum DE, ſivè *yy* ad quadratum AE, ſivè *xx*, ut ejuſdem AE quadratocubus vel x^5 ad quadratocubum Intervalli, vel a^5: facta congrua multiplicatione habebitur hujuſmodi æquatio $x^7 \infty a^5yy$. Quod quidem erat faciendum, demonſtrandumque.

Locus autem, qui jam componendus ſupereſt $x^7 \infty a^4y^3$ in hunc modum componi poteſt. Ponatur Directrix AC eſſe ea, quam in prima epiſtola tertiam vocavi, hoc eſt, in qua quadratoquadratum applicatæ CG æquetur planoplano ſub cubo intercæptæ in parametrum, ſivè Intervallum E*B*; nam curva AOD, quæ *Dire*ctrice AC deſcribitur, ea erit, qua opus eſt ad hujus loci compoſitionem. Sumto namque in ipſa quolibet puncto, ut *D*, &c. demonſtrabitur facillimè CE eſſe *ay* diu. per *x*, modò Intervallum vocetur *a*. Quoniam verò hujus CE cubus hoc eſt a^3y^3 diu. per x^3 in Intervallum *a*, hoc eſt a^4y^3 diu. per x^3 æquatur quadratoquadrato AE, vel x^4, habebitur hujuſmodi æquatio a^4y^3 diu. per $x^3 \infty x^4$; vel facta congrua multiplicatione $a^4y^3 \infty x^7$. Q.E.F.

Eadem ratione omnia loca componi poſſunt, quorum

 æqua-

æquationes ad quemlibet gradum aſcendunt, quod quidem ulterius demonſtrare Tibi non pergo; cum his præmiſſis cæ̧tera pateant.

Atquè ex modò allatis, quæque in prima, & ſecunda epiſtola dicta fuere, manifeſta ſunt ea, quæ me facturum promiſi, videlicet, ut ea loca componerem, quorum æquationes ad ſimpliciſſimas reductæ duobus tantum terminis exprimuntur. Hæc autem, quantæ Geometricis rebus utilitati futura ſint, probe Tu ipſe noſcis.

Poſſunt autem hæc eadem loca ſecunda methodo expoſita componi adhibēdo hyperbolas pro Directricibus; verùm, & hoc ſilentio præteribo, ne Te nimia moleſtia afficiam.

Quod verò attinet ad cætera loca componenda, quorum æquationes pluribus, quam duobus terminis exprimuntur, quæque ad parabolas ſunt, etiam hac eadem methodo componi poſſe, autumo. Verùm id in præſentiarū otium nō mihi ſuppetit; cū præcipuè nō exigui laboris res hæc ſit, quāquā his curvis detectis eò reducta hæc fuerit, ut jam aditus ad eandē pateat. Quin & in hāc ſententiā adducor, ut credā, ſi loca, quæ ad tertiam, aut quartam dimenſionem aſcendūt, componantur, nullo negotio, & reliqua cujuſque gradus componi poſſe; quemadmodum, & hoc etiam pro certo habeo; ſi proprietates curvarum, quæ ſub ſecūdo genere comprehenduntur, eruantur; facillimè etiam fore, eas noſcere, quæ cæteris altioribus curvis conveniunt, quod ab unico exemplo colligi poteſt, quod modo afferam; quamvis ex iis, quæ in ſecunda epiſtola dicta ſunt, ſatis, niſallor, pateat:

Cum demonſtratum ſit in figura 8. epiſtolæ primæ, ſi fuerit triangulum iſoſcele AEV, atque Polo A, Deſcribente CBD indefinita ad partes D, quæ in Directrice EV dato ſui puncto C parallela ſemper incedat ipſi AE. Intervallo autem recta data quacumque BI, quod in latere AV moveatur: Efficiente autem AD ſemper parallela rectæ CI curva deſcribatur ADV, hanc talem eſſe, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D ductaque DB rectangulum ſub AB in BV æque-

æquetur plano ſub BD in datam BI; Si verò fig. 7. ejuſdem primæ epiſtolæ recta VE non ſit recta, ſed curva parabolica prima, ita ut punctum V ſit vertex, diameter verò AV, parameter Intervallum BI, applicatæ ſint ipſi CBD, parallelæ, curvam ADV, quæ deſcribitur, talem eſſe, ut ſi ſumatur in ipſa quodlibet punctum, ut D, atquè ab eo ducatur BD, ſolidum ſub quadrato *AB* in BV æquetur ſolido, quod continetur ſub quadrato *BD* in BI; & tandem ſi pro parabola VCE *D*irectrice hujuſmodi curva aſſumatur, quam ſecundam in hac epiſtola voco, cujus vertex ſit V, diameter AV, parameter autem Intervallum BI, curvam procreari ADV, in qua ſumto quolibet puncto, ut *D*, ductaque DB, planoplanum ſub cubo *AB* in BV æquabitur planoplano ſub cubo D*B* in Intervallum; & ita deinceps. Hoc loco demonſtrabo eadem methodo curvam deſcribi poſſe, in qua ſolidum ſub quadrato A*B* in BV æquabitur ſolido ſub dato quadrato in ductam BD.

*I*n figura enim tertia hujus epiſtolæ, vertice A, diametro AG, parametro autem recta BI prima parabola deſcribatur ACE, quam in puncto A tangat recta AV: In hac autem curva, ceù Directrice, Deſcribens CBD moveri concipiatur parallela diametro *A*G. *A*ccepta autem in recta AV qualibet data recta, ut AV, Polo V, Intervallo autem Parabolæ Directricis parametro, ſivè recta *BI*, quæ in AV ſemper applicata manet, Efficiente autem VD, quæ ſemper parallela exiſtat rectæ, quæ per puncta CI tranſit, curva deſcribatur ADV. Dico hanc hujuſmodi proprietate gaudere, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D, ductaque DB, &c. Solidum, quod continetur ſub quadrato AB in *B*V æquetur ſolido ſub quadrato Intervalli in ductam BD. Atenim cum ſimilia ſint triangula DBV, CBI, erit V*B* ad BD, quemadmodum IB ad BC. Quòd ſi tam IB, quam BC in parametrum IB ducantur, erit VB ad BD, velut quadratum IB ad rectangulum ſub I*B*, BC, vel ex proprietate Parabolæ AC ad quadratum *AB*: quarè erit etiam ſolidum ſub quadrato A*B* in

BV

BV æquale ſolido ſub dato quadrato Intervalli in ductam DB. Q. E. D.

Ex iis autem, quæ in prima epiſtola demonſtrata ſunt, patet, ſi recta *AV*, ita in B dividatur, ut AB contineat duas tertias ipſius AV, atquè ex puncto B recta ducatur BD, curvæ in puncto D occurrens, hanc eſſe maximam earum, quæ duci poſſunt, ita ut ſi ex puncto D recta ducatur DR parallela AV, hæc curvam in puncto B tanget.

Similiter ſi curva Directrix ACE ſecunda parabola fuerit ſupra hac epiſtola deſcripta, in qua cubus cujuſcumque ex applicatis æquetur ſolido ſub intercæpta in datum parametri quadratum, quæ ſit recta data BI, curva quæ hac Directrice deſcribetur eadem Deſcribente, Intervallo, & Efficiente hujus erit Naturæ, ut planoplanum ſub cubo AB in BV æquetur planoplano, quod continetur ſub Intervalli cubo in *DB*. Etenim ob ſimilitudinem triangulorum, ita erit VB ad *B*D, ut *I*B ad BC, vel multiplicatis, tam recta data BI, quàm BC per quadratum BI; erit VB ad BD, quemadmodum cubus IB ad ſolidum ſub quadrato *IB* in BC. Quoniam verò ex proprietate parabolæ Directricis *A*CE idem ſolidum ſub quadrato IB in BC æquatur cubo AB; ideò ita erit VB ad BD quemadmodum datus cubus IB ad cubum *AB*, & patet propoſitum.

Eodem modo ſi VB quarta pars fuerit totius *A*V, ductaque BD ex puncto *D* ducatur recta DR parallela rectæ AV, hæc curvam in puncto *D* tanget.

Quòd ſi curva Directrix *A*C fuerit tertia parabola hac etiam epiſtola deſcripta, curva ADV hac proprietate prædita erit, ut planoſolidum ſub quadratoquadrato AB in *B*V æquetur planoſolido ſub quadratoquadrato Intervalli in BD. Demonſtratio verò, ut & in cæteris caſibus, eadem ratione concinnari poteſt, ac modò allata.

Quarè cum ex his, & ab iis, quæ in prima, & ſecunda epiſtola dicta ſunt, pateat, proprietates, quæ primæ parabolæ, vel hyperbolæ conveniunt, eaſdem etiam convenire alie-

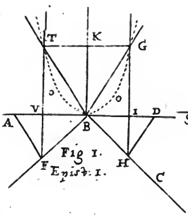
tioribus, habita ratione poteſtatum,ſeu dimenſionum,pro-
ut curvæ aſſumuntur ; ideò in hanc ſententiam adducor , ut credam,quarumcumque curvarum proprietates detegi poſſe, modò eæ perſpectæ ſint,quæ curvis ſecundi generis conveniunt. Poſſem quoquè id Tibi demonſtrare pluribus aliis exemplis , à quibus manifeſtum fit , plurimas proprietates, quæ primæ parabolæ conveniunt , cæteris etiam curvis altioribus convenire,eademque ratione demonſtrationes erui poſſe , modò in ſimpliciſſimas incidere detur . At verò id manifeſtius apparet ex methodo , qua utor ad inveniendas rectas, quæ tangant quaſcumque parabolas in dato puncto , qua quidem methodo eadem prorſus ratione, & facilitate id abſoluitur tam , in prima, quàm in qualibet alia parabola ; Hanc autem nunc Tibi non exponam , brevi enim benedicente Deo laboribus meis uberiorem tractatum de his curvis editurus ſum. Prætereo quoquè plurima alia,quæ ad earum æquationum conſtructionem ſpectant , in quibus unica ignota reperitur ; facile enim eſt ex iis, quæ in ſuperioribus epiſtolis dicta ſunt, eaſdem æquationes his etiam curvis cōſtruere .

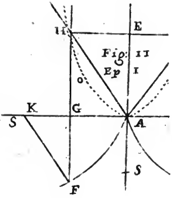
Quarè his omnibus miſſis hoc unum omni ſtudio, majoremque in modum Te rogo, atquè peto,ut hæc,qualiacumque ſint,pro tua humanitate benignè accipias,ceù exiguum animi mei ſummo Te amore , & veneratione proſequentis pignus: quamvis enim tenue,& munuſculum levidenſe hæc ſint , ſpernere tamen *Ipſe* non debes, utpotè quæ ab eo Tibi dono mittuntur, qui majora,ſi vires id ferrent,dono dare vellet; quique Te unum præ omnibus plurimi faciens , ita diligit, amatque, ut nihil apud ſe optatius habeat, quam ea omni ſtudio, & diligentia curare, quæ Tibi gratiſſima fore arbitratur .

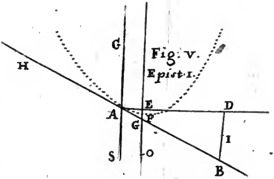
Me una cum Tuis omnibus Severiana Villa nunc habet, quæ quidem,quamvis,& loci amœnitate,irriguiſque ſalientium aquarum fontibus , gratiſque nemorum receſſibus nihil decantatis Theſſaliæ locis decedat;ſqualLida tamen mœ-

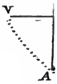
ſtitia-

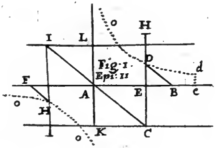
ſtitiaque confecta jacere mihi videtur, ex quo illam reliquiſtis; ſivè id accidat, quia Te abſentem luget, ſivè queritur, quod dulcibus hæc nemora carminibus amplius non reſonent ob ſacrarum ex his regionibus Muſarum diſceſſum, quæ Te ſuum Alumnum pariter ſequutæ, quocumque jeris comites ſemper erunt. Omnes Tui, qui belliſſimè valent, plurimam Tibi ſalutem dicunt;in primis verò Illuſtriſſimus Frater Tuus Petrus Marcellus, optimæ indolis Adoleſcens, qui ita in his ſcientiis proficit, ut certam ſpem præbeat ſe ad ſummorum virorum culmen facilè perventurum. Vale veræ Virtutis exemplar. Vale. Ex Severiana Villa XIX. Kalend.Sept.

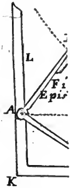

T
K
G
V
B
I
D
A
Fig I.
F Epist: I.
H
C


H
E
Fig: II
Ep I
K
G
S
A
S
F

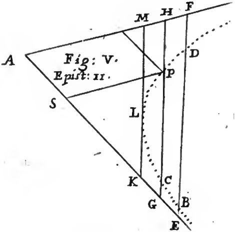

G
Fig: V.
Epist I.
H
E
D
A
G
F
I
S
O
B

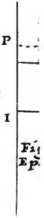

V
A

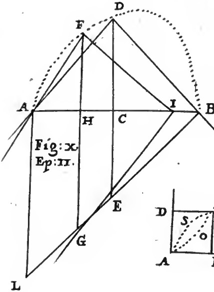

O
H
I
L
D
Fig I.
Epi: II
d
F
A
E
B
C
H
K
C

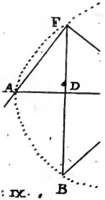

L
A
K

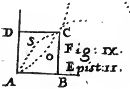
Digitized by Google











Digitized by Google

Digitized by Google

Faciliſsimo Metodo

PER LA QUADRATURA DELLE PARABOLE

Di qualſivoglia grado,

Colla riſpoſta alla Queſtione propoſta dal Sig. G. C.

All'Illuſtriſs. Sig. D. Serafino Biſcardi Patritio Coſentino, Reggente nel Supremo Collateral Conſiglio di Napoli.

Digitized by Google

Digitized by Google

AL LETTORE

D. A.

Lodevole, ſe alcuno altro mai, è il coſtume tenuto da' Matematici, che propongono altrui per pruova d'ingegno, a ſciogliere Problemi, o di Geometria, o d'Arimmetica, quando tal coſtume venga accompagnato da quelle condizioni, che la civiltà, e non la gara, richiede. E non ſolo lodevole è, ma così pure antichiſſimo, quanto antichi ſono il ſaviſſimo Rè degli Ebrei Salamone, ed Iramo Rè di Tiro, che ſimiglianti queſtioni inviavanſi a ſnodare l'uno all'altro. Queſte da Dio ſcrittore delle coſe de' Fenici, vengon dette Enimmi, *αἰνίγματα, ma loro Menandro Efeſio dà il nome di* Problemi, *προβλήματα, come pur fà Gioſefo Ebreo ſcrivendo contra Apione; che non eſſere ſtati, ſe non di coſe alla Geometria, ò all'Arimmetica pertinenti, la ſapienza di que' due gran Rè agevolmente ce'l perſuade. Nè ci dia noja il nome* d'Enimmi; *perocche i Problemi, quando tolti da quella uſitata loro ſpinoſità, e per modo vago, e quaſi in gergo meſſi in campo, di cotal titolo non ſi ſdegnano. Anche dal Clavio nella giunta della ſua Algebra,* Enimmi *ſi diſſero i Problemi figuratamente propoſti nel primo libro dell'Antologia cap.46., e'n maggior numero rapportatici dal Bachet al fine del lib.5. di Diofanto. Nè d'altra fatta mi ſembra, che foſſero gli* Enimmi, *che la Reina degli Etiopi, andò fin da Saba, ò ſia Meroe, a proporre allo ſteſſo Rè Salamone, come ne' Sagri libri ſi rammenta, che'n quella loro lingua gli appellano* Chidoth, *Se così è, dobbiam credere, che sì alta Reina fù in nulla inferiore alla tanto rinomata Ipazia Aleſſandrina, che nelle ſcienze Matematiche avanzò d'aſſai il ſuo padre, e maeſtro Teone, per rapporto di Filoſtorgio. Seguirono a loro uſanza, l'eſemplo i Greci: e ſappiamo, che Platone propoſe a' Matematici*

matici dell' Accademia il Problema della duplicazione del Cubo. Altri eſempli non mancano, che ci fanno avvertiti queſt'uſo non eſſere ſtato meno frequente tra gli antichi, ch'oggi ſia tra noi. Pochi dì ſono ne fù quì in Napoli per mezzo delle ſtampe dato in luce uno da G. C., per quanto dalla ſcrittura appare, valentiſſimo Matematico. Ed è, ſe'l metodo tenuto dal grande Archimede in quadrar la Parabola del primo grado, abbia luogo, o rieſca anche nelle Parabole di grado ſuperiore. Nacque il dubbio da due diverſi pareri, che'n ciò ebbero Scooten, e Fermat, quegli che par dica di sì, queſti che chiaramente afferma di nò. E' il Problema ſenza dubbio ingegnoſo, ma agevole a ſcioglierſi da chi che ſia, purche voglia la briga di così un poco fermarviſi co'l penſiero. E' agevole dico appigliarſi alla parte del nò, tenuta dal Fermat, ed inſieme producerne la dimoſtrazione. Impreſa forſe più malagevole è quadrar tutte le Parabole di qualunque grado ſieno, e queſto con un ſol modo, veramente Geometrico, e generale. Or chè ſia? Chiunque à veduto l'opere di Bartolomeo Intieri, non iſtimerà arroganza, ſe'n età tanto giovanile, come è la ſua, abbia l'animo d'entrare, e meſcolarſi co' Matematici, e voglia far pruova del ſuo talento così nell'una, come nell'altra delle due coſe quì ſopra accennate; tuttocche ſopraggiuntole in tempo, che a ſtudi molto da queſti lontani, e diverſi teneva fiſſo ogni ſuo penſiero. Se gli è riuſcito bene, potrà participar della gloria, che s'acquiſtò Abdemono di Tiro, ch'ebbe la ſorte di ſciorre alcuni Problemi di Salamone, da' quali il Rè Iràmo non ſeppe ſvilupparſi, e pur coſtui altro non era, ch'un giovanetto παισ νεώτεροσ *è detto da Menandro. Ora per mio avviſo, tutto ciò è venuto fatto all' Intieri con pochiſſimi Teoremi così propi, e facili, che ſarà maraviglia, come tanti ſovrani Matematici ad un ſentiero così pronto, e ſpedito, e che loro era quaſi tra' piedi, non ſi ſieno abbattuti. Vivi felice.*

Illu-

Illuſtriſs. Sig. mio, e Padrone Colendiſſimo

ESſendo proprio delle Geometriche ſpeculazioni, Illuſtriſſimo Signor mio, d'eſſer talmente tra di loro unite, e dipendenti, che difficilmente poſſa, chi d'alcuna di quelle ſi diletta, divenirne à baſtanza appagato, ſenza eſſere obbligato ad apprēdere inſieme almeno qualche leggiera notizia della maggior parte di quelle; ne ſegue, che ſpeſſe fiate, chi ad alcuna delle medeſime per diletto attende, ſi trovi poi coſtretto ad intraprendere fatiche maggiori allettato, ò dalla dolcezza, che le ſteſſe arrecano, ò dalla ſperanza dell'acquiſto d'altre verità nõ conoſciute. Quindi è, che una fatica ſi chiami dietro l'altra; come appunto vedo ora eſſere avvenuto à me, che per aver promoſſa nelle curve ſuperiori la dottrina de'Moderni, e de gli antichi Geometri intorno quelle ſole curve, che Sezzioni Coniche s'appellano, mi trovo in obbligo di dimoſtrare un nuovo, e general metodo (ſe non m'inganno) per quella parte, che riguarda la quadratura delle Parabole di qualſiſia grado, ſpinto non tanto dall'invito fatto da un valente, e dottiſſimo Matematico col proporre un Problema à queſta materia ſpettãte; quanto dà una cagione molto più alta, e potente d'abbracciare un'occaſione di recare a V.S. Illuſtriſſima qualche picciola teſtimonianza dell'oſſequioſa riverenza, che porto al ſuo ſingolar merito. Peroche è così grande in me l'ammirazione, e la ſtima, che hò concepita verſo V. S. Illuſtriſſima per le tante, e ſingolari virtù delle quali è ella ſopra chi ſi ſia ornata, e così vivo l'affetto, che umiliſſimamente le porto, che non hò potuto far dimeno d'offerirle queſto picciolo dono, moſſo dalla riverenza, e dall'amore, che di pari han luogo nell'animo mio. Ne voglio io quì entrare nell'ampio, e ſpazioſo campo delle tante, e rare doti del ſuo grand'animo; poichè ſarebbe queſta impreſa troppo malagevole, e diſuguale alle mie de-

boli forze, che ſenza fallo reſterebbero oppreſſe dalla grandezza delle coſe, che ella glorioſamente, e con raro eſempio hà operate. Sallo, e'l ſaprà ſempre, finche ſarà in pregio la virtù, Italia tutta, e ſpezialmente queſta noſtra Città, che tante volte hà ammirato in V.S.Illuſtriſs. l'eloquenza de'più illuſtri Oratori della Grecia, e del Lazio; ed ora nel veder collocata la ſua integrità, e'l ſuo valore in coteſto ſupremo Senato, non può non godere, ch'ella abbia conſeguito il frutto delle ſue glorioſe fatiche, come che inſeparabile dal beneficio che ne riceve. Sallo, e'l ſaprà ſempre, e la Spagna, e la Francia tutta, che han fatto a gara in celebrare il ſuo merito; avendo quella conferiti largamẽte in V.S.Illuſtriſs. tutti quei premj, ed onori, che poteva, ciaſcun de' quali ad altri raramente ſi concede; e queſta cõ mille trombe di lode celebrati i glorioſi parti del ſuo maraviglioſo ingegno, miracolo de' tempi noſtri, eſſendo egli arricchito di tante, e sì varie ſcienze, e della più profonda, e varia Erudizione. Nè più agevole mi ſarebbe ſpiegar colla penna quella ſua dolce umanità, e ſuave gentilezza di coſtumi; doni così largamente, e in tanta copia dalla bontà del ſupremo Fattore conceſſile, che ſicome è l'ornamento, e lo ſplendore; così è ancora la delizia del ſecol noſtro. Laonde ſe à quanto fin'ora hò detto s'aggiungerà la particolar obbligazione, che debbo à i tanti, e ſingolari favori, che ella ſi degna tutto giorno compartirmi, compiacendoſi ammettermi nel numero de' ſuoi più intimi, e divoti ſervitori: ſenza dubbio ſi accorgerà ogn'uno, non aver io abbracciata queſt'impreſa moſſo da deſiderio, ò vana ambizione di gloria, ma ſolamente per porgere un tributo della mia gratitudine à V. S. Ill. mio ſingolar padrone, e ſicuriſſimo difenſore della vera virtù. Ma perche le lodi, ch' al ſuo gran merito convengono, ſon tante, e tali, che ſolo da V.S. Illuſtriſs. lume, e ſplẽdore di vera eloquenza, potrebbero eſſere degnamente celebrate, perciò laſciando un' impreſa troppo alle mie forze ineguale, darò principio all'affare intrapreſo.

Lo

Lo Schooten nella ſezzione 17. delle ſue eſercitazioni trattando della quadratura della prima Parabola afferma ch' il metodo d'Archimede ſia ſufficiente anco nelle quadrature delle curve ſuperiori, cioè, come credo, delle Parabole di gradi più compoſti. Ma all'incontro il Fermat geometra ſottiliſſimo nel trattato *de Æquationum localium tranſmutatione* giudica il detto metodo inſufficiente per la quadratura delle medeſime curve ſuperiori. I quali diverſi pareri, perche nè dall'uno, nè dall'altro ſono ſtati confermati con qualche dimoſtrazione, perciò hanno dato occaſione al dottiſſimo Autore di proporre la ſeguente queſtione con tali parole.

Or noi deſideriamo ſapere, ſe ſia vero il giudicio dello Schooten, ò pure il ſentimento del Fermat, ſe vero il giudicio di quello domandiamo il proceſſo del metodo Archimedeo per la quadratura dell'altre curve ſuperiori; ſe vero all'incontro il ſentimento di queſto la dimoſtrazione dell'inſufficienza dell'accennato metodo.

Or io, benchè tal propoſta non ſia ſtata fatta à me, come quello, che mi conoſco immeritevole del nome di Matematico, hò nõdimeno riſoluto sforzarmi di ſodisfare non ſolo alla domanda di sì valente Autore, ma ancora paſſando inanzi a ſpeculazioni più ſublimi, e che ricercano una ſingolar diligenza, dar un metodo elegantiſſimo, e puro geometrico di quadrar qualſivoglia ſorte di Parabole, che hanno queſta proprietà, che i cubi, o pure i quadrato-quadrati delle ſemiapplicate, &c. hanno tra loro la proporzione dell'intercette, ò de'quadrati, ò cubi fatti dalle ſteſſe intercette, delle quali ſi fà menzione nelle propoſizioni 8. e 9. del mio Apollonio e Sereno promoſſo; ſperando di far coſa grata a V. S. Illuſtriſſima, ciò, che è ſtata la vera, e principal cagione, che m'hà ſpinto ad intraprendere queſt'affare.

Riſponderò dunque primieramente alla domanda dell'Autore; dimoſtrando, che il metodo d'Archimede non può ſtenderſi alla quadratura delle Parabole ſuperiori, come af-

fermò il Fermat; e doppo darò il modo di quadrare qualſivoglia dell'accennate Parabole, mantenendomi ſempre dentro le leggi della più rigoroſa Geometria, il che non sò ſe ſia ſtato oſſervato dal Fermat nel mentovato trattato.

Ma il primo ſcrupolo, che mi fece dubitare del metodo Archimedeo, nacque da queſto, che le ſeconde, terze, e quarte Parabole, &c. dell'accennate propoſizioni non hanno altro, che un ſol diametro, dal quale ſon diviſe in due parti uguali tutte l'applicate al medeſimo, come poco appreſſo ſi dimoſtrerà; onde eſſendo il metodo Archimedeo appoggiato a quella proprietà della Parabola prima, che qualſivoglia diametro divide in due parti uguali tutte l'applicate al medeſimo, par che ne ſegua ancora, che mancando queſta proprietà de' diametri nell'altre Parabole, mancherà anco il metodo diventando inefficace per la deſiderata quadratura.

Quello però, ch'hà fatto uniformarmi in tutto col ſentimento del Fermat è ſtato l'aver conoſciuto, (*fig.* 1.) che nella Parabola cubica, il primo triangolo ADC nõ hà la proporzione dovuta al ſecondo triangolo ABC; la di cui cuſpide è in B, punto fatto dalla toccante FBG parallela ad AC. Imperòche nella Parabola cubica della prop. 8. AF è uguale alla radice q. di $\frac{4}{27}$ del quadrato AD; e per il metodo Archimedeo dovrebbe eſſere $\frac{1}{3}$ d'AD.

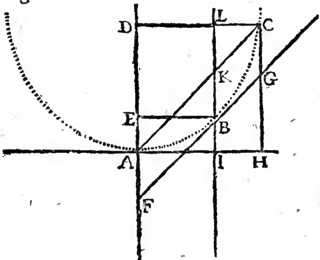
Dalle quali coſe ſi vede chiaramente, che lo Schooten nel citato luogo parlò con conjetture, laſciando d'accertarſene colla dimoſtrazione. Nella qual' opinione via più mi ci confermo, conſiderando aver inciampato nel medeſimo errore alla ſezzione 19. dello ſteſſo trattato; dove, doppo d'aver trovato il centro della gravità nella prima Parabola cõ metodo dipendente dalla nominata proprietà de' diametri, affermò, che anco queſto metodo riuſciva nelle curve ſuperiori; onde, ſe per curve ſuperiori intende Parabole, il che nõ può negarſi, parmi, che ſenza dubbio ſi ſia allontanato dal vero.

Egl'è ben vero però, che conſiſtendo il metodo Archimedeo nell'inſcrizione d'infiniti triangoli dentro la Parabola, la pro-

proporzione de' quali è ſempre la medeſima, e nota; non intendo di dimoſtrare inſufficiente per la quadratura qualſivoglia metodo, che può dipendere dall'inſcrizzione, anco de'triangoli, ma ſolamente quello, che adoperò il principe de' Geometri Archimede.

Che poi le Parabole ſuperiori non abbino altro, che un diametro, dal quale ſiano diviſe in due parti uguali tutte l'applicate, ſi può in tal maniera brevemente dimoſtrare.

Fig. 1.



Sia la Parabola ABC la ſeconda della propoſizione 8. del mio Apollonio, nella quale i cubi delle ſemiapplicate hanno tra di loro la ſteſſa proporzione, che l'intercette. Il vertice di queſta ſia A, il diametro, che taglia ugualmente tutte l'applicate AD. l'applicate al medeſimo ſiano DC, BE. Da qualſivoglia punto preſo in queſta curva, come B, ſi tiri la toccante FBG, dalla quale ſia tagliato il diametro prolongato, in F. Dal pũto A ſi tiri AC parallela alla toccante FBG, e da punti B, C, le rette BL, CH parallele al diametro AD, e dal vertice A, la toccante AIH. Tirate doppo da punti B, C, le ſemiapplicate BE, CD al diametro AD, dico, che BL non taglia ugualmente in K la retta AC parallela alla toccante FB, e terminata nella Parabola.

Sia la retta AI $\infty\, x$. AH $\infty\, y$. e il quadrato del parametro ſia aa. Per la proprietà di queſta Parabola, AE, o pure IB ſarà $\infty\, \frac{xxx}{aa}$. onde eſſendo AE ſubdupla d'AF per la propoſi-

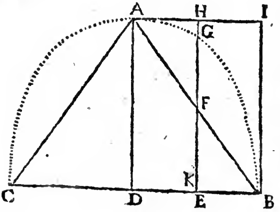
zione 21. del mio Apollonio; ſarà tutta la retta FE, ò pure IK uguale a queſta quantità $\frac{3xxx}{aa}$. Parimente AD, ò pur CH ſarà $\frac{yyy}{aa}$. E perche i triangoli AIK, AHC ſon ſimili: perciò fatte le dovute operazioni, averemo queſt' equazione $3xx \infty yy$. dalla quale ſi conoſce, che x non è la metà d'y, cioè, che AI non è uguale ad IH. onde ne anco AK ſarà uguale à KC. la qual coſa ſi doveva dimoſtrare.

Ed ecco, Illuſtriſſimo Signor mio, chiaramente dimoſtrata l'inſufficienza del metodo Archimedeo, come domanda l'erudito Autore; reſta ora, che paſſi al ſecondo punto, la qual coſa acciòche ſia da me fatta colla maggior chiarezza, e ordine, che ſia poſſibile, la tratterò in queſto modo.

Primieramente darò un metodo faciliſſimo di quadrar tutte le Parabole della propoſizione 8. dell'accennato Apollonio, premettendo a queſto fine due faciliſſimi Teoremi. Secondo paſſerò alla quadratura delle Parabole della 9. propoſizione del medeſimo trattato, ſervendomi quaſi dello ſteſſo metodo, e premettendo medeſimamente due altri Teoremi faciliſſimi, e ſimiliſſimi a maggior ſegno a' primi due; le dimoſtrazioni de' quali Teoremi ſaranno da me paſſate ſotto ſilenzio, per non abuſarmi della pazienza di V. Ill. à cui ſaranno molto ben note. Sia dunque queſto il

Fig. 2.

PRIMO TEOREMA.

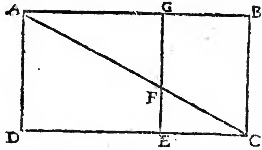


Se nel parallelogrammo DI, il di cui diametro AB, vertice A, diametro il lato AD, l'applicate nell' angolo ADB, ſi deſcriverà la prima Parabola AGB, di modo, che paſſi per il punto B. dico, che la ſomma di tutti i quadrati, che ſi poſſono fa.

re da tutte l'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela alla retta AD, una delle quali ſi rappreſenta dalla linea EH, ſarà alla ſomma di tutti i quadrati dell'infinite linee del triangolo AFBI, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta HF; come tutte le linee del parallelogrammo DI, a tutte le linee del trilineo AGBI; cioè, come il parallelogrãmo al trilineo. Ma, ſe la curva AGB ſarà la ſeconda, ò cubica dell'accennata propoſizione, nella quale i cubi delle ſemiapplicate ſono come l'intercette, dico, che la ſomma di tutti i cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela al diametro, come ſopra s'è detto, ſarà alla ſomma de' cubi dell'infinite linee del triangolo ABI; come tutte le linee del parallelogrammo DI, a tutte le linee del trilineo AGBI; ò pure, come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI. Il ſimile ſi deve intendere delle Parabole più alte, mutando ſempre le Poteſtà, ſecondo il grado delle medeſime curve.

TEOREMA SECONDO.

Fig. 3.



Nel parallelogrammo DB, tirato il diametro AC, dico, che la ſomma di tutti i quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo, ogn'una delle quali è uguale, e parallela al lato BC, ſarà tripla della ſomma di tutti i quadrati, fatti dall'infinite linee, che ſi poſſono tirare dentro il triangolo ACB parallele al lato BC, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta GF. Ma la ſomma de' cubi, fatti dall'infinite linee del parallelogrammo, ſarà quadrupla della ſomma di tutti i cubi, fatti dall'infinite linee del triangolo. Lo ſteſſo s'intenda delle Poteſtà più alte, oſſervando ſempre la proporzione accennata.

Da'

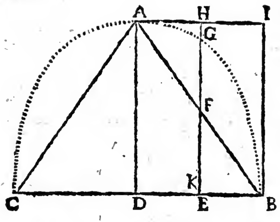
Da' quali Teoremi, credo, che di già abbia V.S.Ill. compreſo quanto ſarò per dire intorno la quadratura (*fig.2.*); peròche, per il ſecondo Teorema, la ſomma di tutti i quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo DI è tripla della ſomma di tutti i quadrati dell'infinite linee del triangolo ABI. ma, per il primo Teorema, come è la ſomma de' quadrati del parallelogrãmo allà ſomma de' quadrati del triangolo, così il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI; dunque ancò il parallelogrammo ſarà triplo del trilineo AGBI: mà allo ſpazio Parabolico AGBD, ſarà, come tre à due; e tutta la Parabola CAGB, ſarà ſeſquiterza del maſſimo triangolo CAB. Se poi la curva AGB ſarà la ſeconda dell'ottava propoſizione, nella quale i cubi delle ſemiapplicate ſono tra loro, come l'intercette: operando della medeſima maniera, troveremo, che il parallelogrammo DI, ſarà quadruplo del trilineo AGBI; e per conſeguenza tutto lo ſpazio Parabolico CAGB ſarà al maſſimo triangolo CAB, come 3. à 2.

Lo ſteſſo modo ſi terrà per aver la quadratura delle curve più compoſte, intorno alle quali non mi tratterrò di vantaggio; ma paſſerò alla quadratura dell'altre Parabole, nelle quali i cubi, ò quadrato-quadrati, &c. delle ſemiapplicate hanno tra di loro la medeſima proporzione, che i quadrati, ò cubi dell'intercette; premettendo a queſto fine i ſeguenti due Teoremi.

TEOREMA TERZO.

Ripigliata la fig. 2. del primo Teorema, ſe la curva AGB ſarà la ſeconda, ò cubica Parabola della 9. propoſizione, nella quale i cubi delle ſemiapplicate hanno tra loro la medeſima proporzione de' quadrati dell'intercette, e tirata qualſivoglia EH parallela al diametro, ſi troverà una media proporzionale tra le rette EH, HF. dico, che la ſomma de' cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela alla retta DA, come appariſce della

Fig.2.



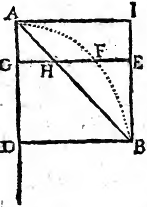
la retta HE, ſarà alla ſomma di tutti i cubi d'altrettante infinite linee medie proporzionali trà tutte le rette del parallelogrammo DI, e quelle del triangolo ABI, una delle quali ſi appreſẽta dalla retta HK, come la ſomma di tutte le linee del parallelogrammo DI, alla ſomma di tutte le linee del trilineo AGBI: cioè,come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI.

Ma ſe la curva AGB ſarà la terza della medeſima 9. propoſizione,nella quale i quadratoquadrati delle ſemiapplicate ſono tra di loro, come i cubi dell'intercette, e tra le rette EH, HF ſi troveranno due medie proporzionali, la prima,e la maggior delle quali ſia HK, dico, che la ſomma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite linee del parallegrammo DI, ſarà alla ſomma di tutti i quadrato-quadrati d'altrettante infinite medie proporzionali, una delle quali ſi appreſenta dalla retta EK, come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI. Il medeſimo s'intenda delle curve più compoſte, mutato però l'ordine delle Poteſtà, come è conveniente.

TEOREMA QUARTO.

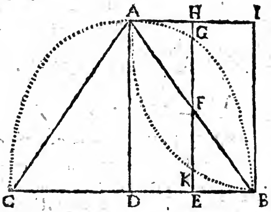
Se nel parallelogrammo DI, il di cui diametro ſia AB, ſi deſcriverà la Parabola prima AFB, che paſſi per il punto B, il di cui vertice ſia A, diametro AD, l'applicate nell'angolo ADB; dico, che, ſe ſi tirerà qualſivoglia applicata GF, che tagli il diametro del parallelogrammo in H, e il lato BI in E, ne ſeguiranno due proprietà: la prima delle quali ſarà, che le rette GE, GF, GH; ſaranno in una continua proporzione,

Fig.4.



ne, e la ſeconda, che il compoſto di tutti i cubi dell' infinite linee del parallelogrammo DI, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta GE, ſarà al compoſto di tutti i cubi dell' infinite ſemiapplicate dentro la ſemiparabola AFB, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta GF, come 5. à 2. Ma ſe la Parabola AFB ſarà la ſeconda, ò cubica della propoſizione 8., dico, che GF ſarà la maggiore delle due proporzionali, che cadono tra le rette EG, GH; e che la ſomma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ſarà alla ſomma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite ſemiapplicate, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta GF, come 7. a 3. Lo ſteſſo s'intenda dell'altre parabole, mutato però ſempre il numero delle Poteſtà ſecondo l'ordine accennato.

Fig.2.



Da' quali due Teoremi ſi cava maraviglioſamẽte la quadratura di tutte le parabole della 9. propoſizione. Imperoche ſia la parabola AGB la ſeconda, ò pure la cubica dell'accẽnata propoſizione, nella quale i cubi delle ſemiapplicate hanno tra di loro la proporzione de' quadrati dell'intercetto, e coſtruita la figura 2. ci ſi aggiunga di più la Parabola prima, il di cui vertice ſia A, diametro AI, le ſemiapplicate nel-

nell'angolo AIB, e con tal' parametro, che paſſi per il punto B. Tirata qualſivoglia HE parallela ad AD, per il ſecondo Teorema, così ſarà HE, a KH, come HK, ad HF; onde per il primo Teorema, la ſomma di tutti i cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ſarà alla ſomma di tutti i cubi dell'infinite ſemiapplicate dentro la ſemiparabola AKB, una delle quali ſi rappreſenta dall'applicata HK, come il parallelogrammo DI al trilineo AGBI; ma la ſomma di tutti queſti cubi, alla ſomma degli altri, per il ſecondo Teorema è, come 5. à 2.; dunque anco il parallelogrammo DI ſarà al trilineo AGBI, come 5. à 2. Ma allo ſpazio ſemiparabolico, come 5. à 3. Il che da altri è ſtato dimoſtrato. Della ſteſſa maniera facendo nelle Parabole più alte di queſto genere troveremo la di loro quadratura.

E queſto baſti per adempire quanto da me s'era promeſſo appartenete alla quadratura delle Parabole, ſoggiungendo di più, che ſe lo Schooten aveſſe uſata un pò più di diligenza in eſaminare attentamente il metodo intorno la quadratura della prima Parabola addotto nella ſezzione 17. del medeſimo trattato, e nell'ultimo capitolo della deſcrizzione in piano delle Sezzioni Coniche, poteva ſenza dubbio affermare, che aveſſe luogo nelle curve ſuperiori, il che forſe nõ conobbe per non eſſerſi incamminato per la ſtrada diritta, uſando dimoſtrazioni improprie, e non naturali, come conoſcerà chiaramente, chi paragonerà il metodo da me quì addotto con quello riferito dal medeſimo Autore ne'luoghi citati. La qual coſa è degna di grandiſſimo biaſmo ſopratutto nella Geometria, ſcienza ſopra qualſivoglia, ſemplice, e pura.

Gradiſca intanto V. S. Illuſtriſs. queſta mia picciola, ma oſſequioſa offerta, in quella guiſa, che anco i Principi grandi non ſdegnano gradire qualſivoglia picciolo dono, che venga da mano divota, e riverente; aſſicurandola, che ſe averò la fortuna di conoſcere eſſerle ſtato grato queſto ſegno dell'oſſervanza, e attenzione dell'animo mio, mi ſtimerò ſom-

ma-

mamente onorato,e contento per aver cõſeguito quanto da me ardentemente ſi deſiderava.E pregandole dal Cielo ogni felicità per l'avanzamento delle belle lettere,e di tutti i buoni ſpezialmente,reſto facendole divotiſſima riverenza.

Di V. S. Illuſtriſs.

Napoli 6. Maggio 1706.

Divotiſs., ed Obbligatiſs. Servitore
Bartolomeo Intieri.